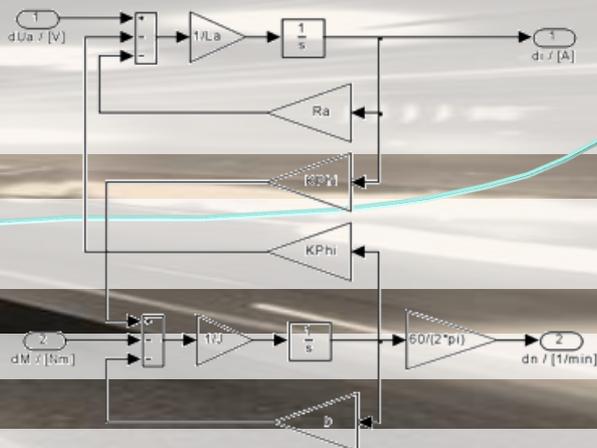
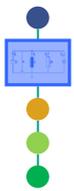


Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme

Vorlesung: Modellbildung und Identifikation

Kapitel 3





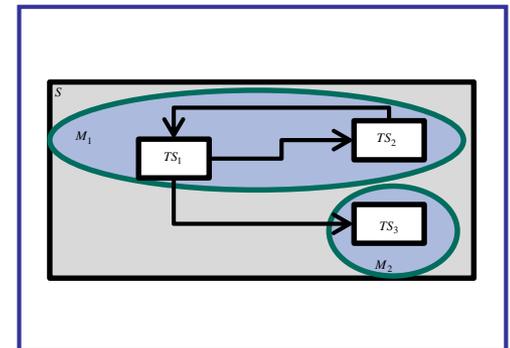
1. Einführung

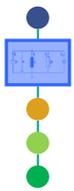
1. Motivation
2. Organisatorisches
3. Übersicht
4. Anwendung von Modellen
5. Klassifikation
6. Vorgehen bei der Modellbildung
7. Validierung und Verifikation



2. Strukturierung

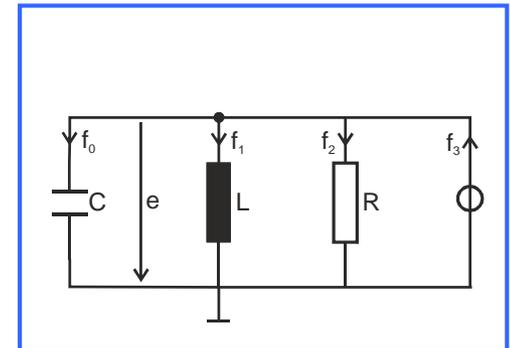
1. Abgrenzung
2. Strukturiertes System
3. Kausale Modellierung
4. Kopplungsanalyse
5. Strukturierung mit Matlab/Simulink
6. Objektorientierte Modellierung





3. Generalisierte Ersatzschaltbilder

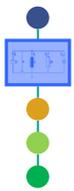
1. Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder
2. Methode der generalisierten Variablen
3. Grundlegende Systemelemente
4. Methode der generalisierten Netzwerkanalyse



4. Theoretische Modellierung

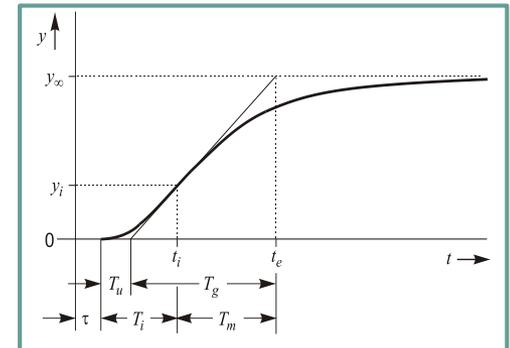
1. Methode der Variationsanalyse
2. Aufstellen der Zustandsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{e_j}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{e_j}} = F_j^{(Q)} - F_j^{(F)}$$
$$L = T^* - U$$



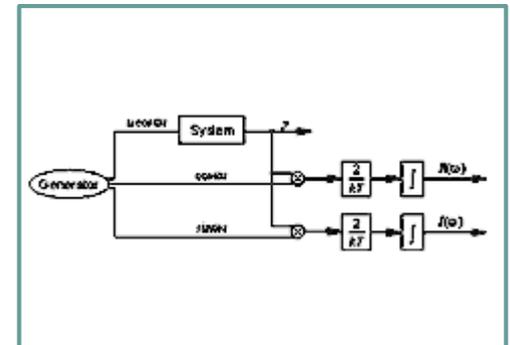
5. Identifikation mit parametrischen Modellen

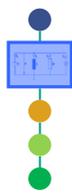
1. Übersicht
2. Kennwertermittlung
3. Least-Square-Verfahren für statische Prozesse
4. Least-Square-Verfahren für dynamische Prozesse
5. Generalized-Least-Square-Methode
6. Methode der Hilfsvariablen
7. Nichtlineare Methoden



6. Identifikation mit nichtparametrischen Modellen

1. Frequenzganganalyse
2. Korrelationsanalyse





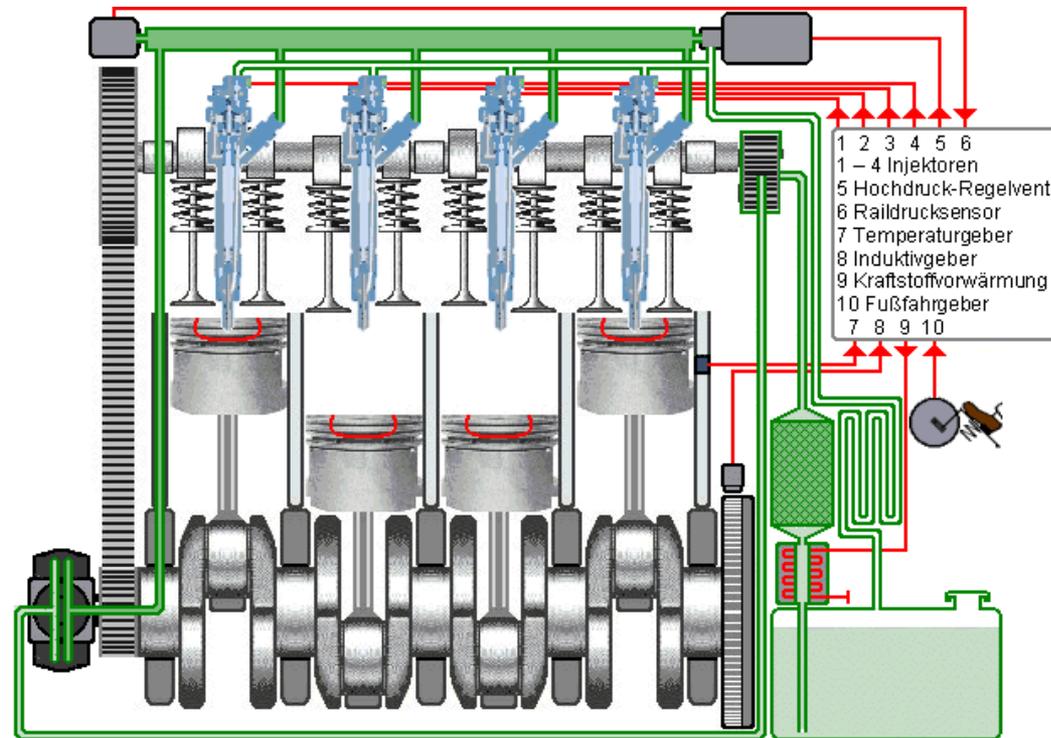
3.1 Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder

3.1.1 Beispiel: Piezo Common Rail Injektor (1)

Ausgangspunkt:

Modellierung häufig **Multidomänenproblem**: Phänomene aus verschiedenen phys. Domänen (D_i): Z.B. elektrische, magnetische, mechanische, pneumatische, hydraulische

Beispiel:



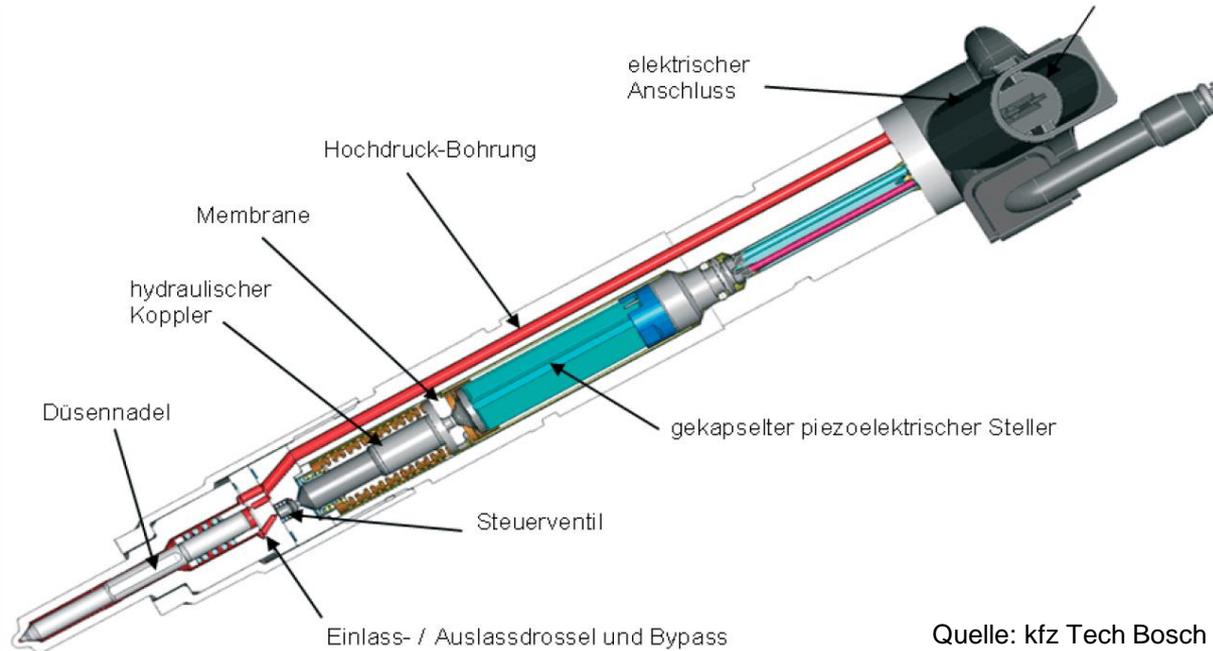
Quelle: kfz Tech



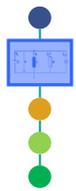
3.1

3.1.1

Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder Beispiel: Piezo Common Rail Injektor (2)



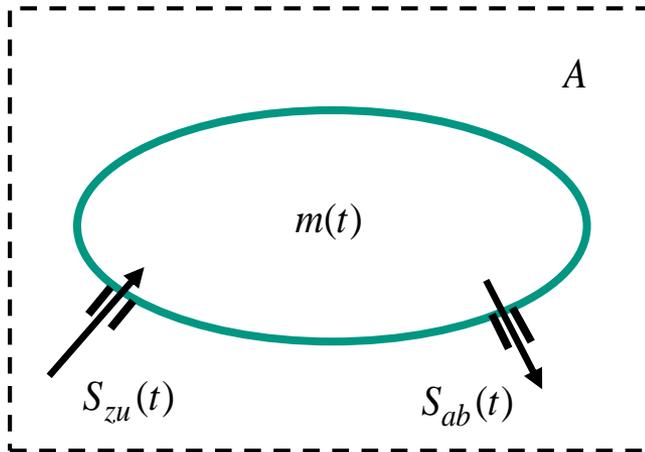
Ziel: Aufstellen eines **Ersatzschaltbildes** für den Wirkzusammenhang für ein (Teil-)System aus ggf. **verschiedenen physikalischen Domänen** (D_i).



3.1 Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder

3.1.2 Erhaltungssätze

Aus Physik bekannt: Nutzung von Erhaltungssätzen



- A : Erhaltungsgröße im geschlossenen System
- m : Erhaltungsgröße im offenen System
- $S_{zu,ab}$: Zu- bzw. abfließende Menge der Erhaltungsgröße pro Zeit

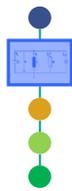
Erhaltungssatz :

Die Erhaltungsgrößen können in einem geschlossenem System weder erzeugt, noch vernichtet werden.

$$\frac{dm(t)}{dt} = S_{zu}(t) - S_{ab}(t)$$

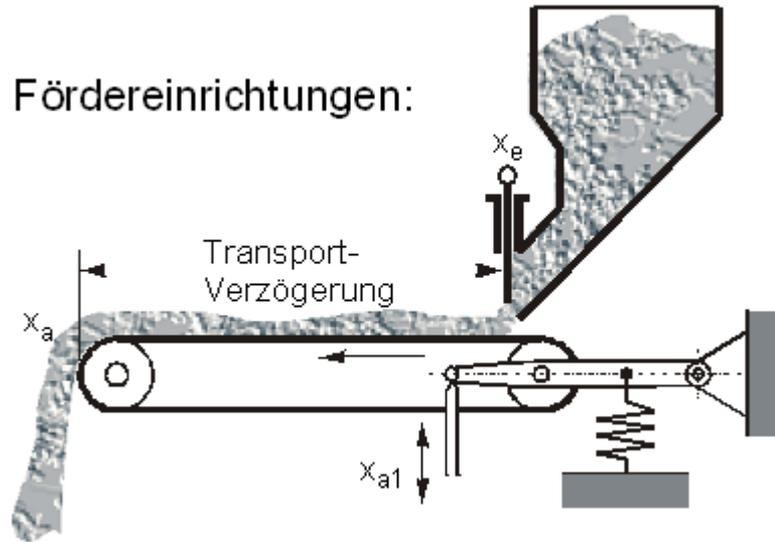
bzw.

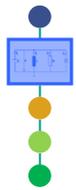
$$m(t) = m(t_0) + \int_{t_0}^t (S_{zu}(\tau) - S_{ab}(\tau)) d\tau$$



3.1 Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder

3.1.2 Beispiel: Schüttguttransportband (1)





3.1 Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder

3.1.2 **Beispiel: Schüttguttransportband (2)**



3.1

3.1.2

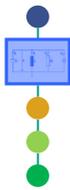
Motivation generalisierter Ersatzschaltbilder

Erhaltungsgrößen

Erhaltungsgröße		Mengenstrom	
Masse	m	Massenstrom	$\frac{dm}{dt}$
Energie	E	Leistung	P
Ladung	Q	Strom	i
Impuls	p	Kraft	F
Drehimpuls	L	Drehmoment	M
Volumen	V	Volumenstrom	\dot{V}

Problem: Für Multidomänenansatz nicht alle Erhaltungsgrößen geeignet, da sie nur in bestimmten Domänen definiert sind.

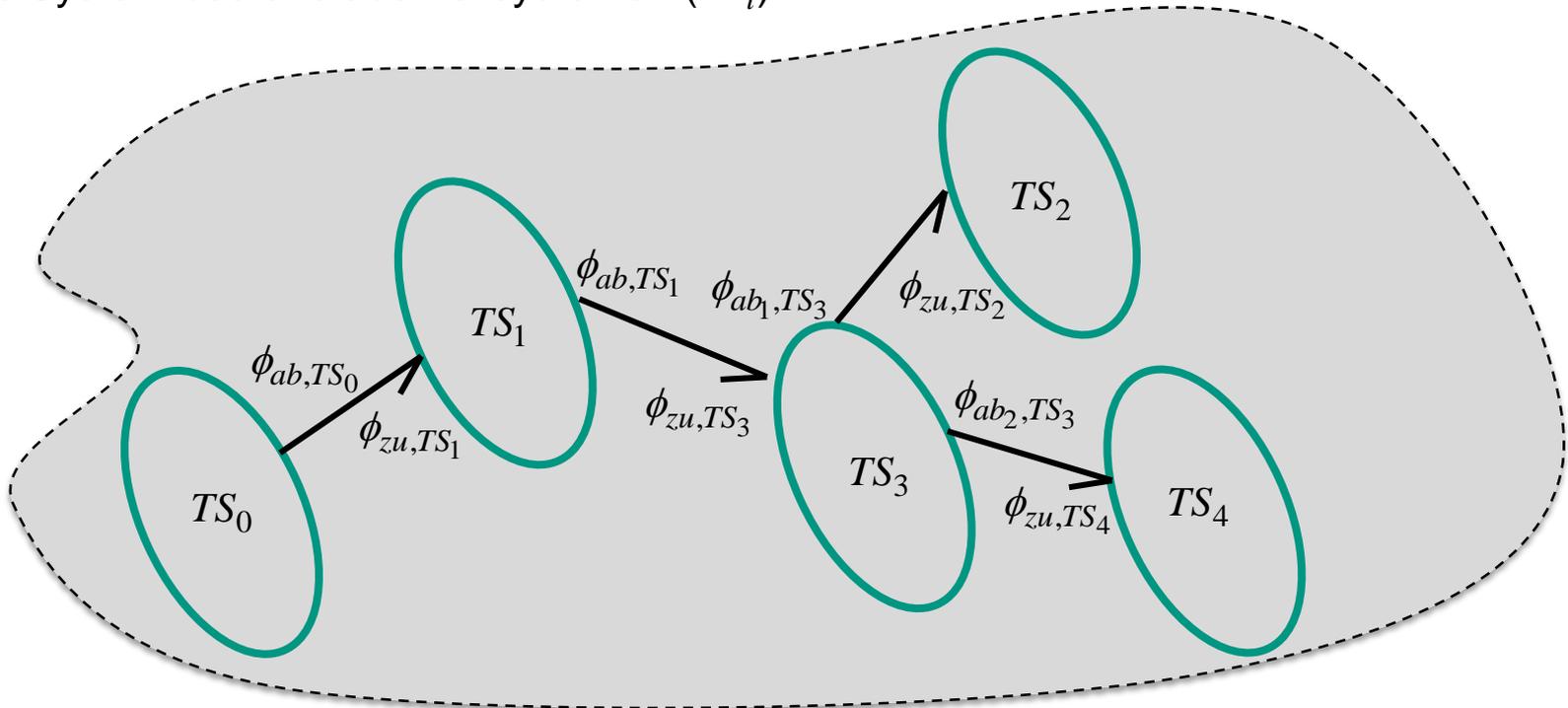
Daher: Nutzung der Energie als universale Erhaltungsgröße.



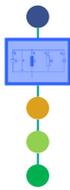
3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.1 Komponenten und Bonds

- Das Gesamtsystem sei durch eine Umhüllung festgelegt und abgeschlossen
- Das System bestehe aus Teilsystemen (TS_i)



- Die Verbindung der Teilsysteme erfolgt über sogenannte **Bonds**. Die Energieübertragung zwischen den Teilsystemen erfolgt über **Energieflüsse**. Der Energiefluss ist in Richtung Pfeil positiv.
- Es gilt $\phi_{ab_j,TS_i} = \phi_{zu_r,TS_p}$, wenn das Teilsystem TS_i mit TS_p verbunden ist.



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.1 Komponenten und Bonds

- Die Teilsysteme TS_i werden durch den Energieerhaltungssatz beschrieben:

$$\frac{dE_{TS_i}}{dt} = \sum_r \phi_{zu_r, TS_i} - \sum_p \phi_{ab_p, TS_i}$$

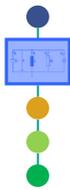
- Darin beschreibt $r + p$ die Anzahl der **Ports/Tore** in das Teilsystem TS_i .
- Ist für ein Teilsystem $r + p = 1$ spricht man von einem **Eintor** (im Bsp.: TS_0, TS_2, TS_4) andernfalls von einem **Mehrtor** (im Bsp.: TS_1, TS_3)

- Eintore** unterteilt man dabei in

- Quellen** (im Bsp.: TS_0) mit $\phi_{ab, TS_{Quelle}} \geq 0$

- Speicher** (im Bsp.: TS_2, TS_4) mit $\frac{dE_{TS_{speicher}}}{dt} = \phi_{zu_r, TS_{Speicher}}$

wobei $\phi_{zu_r, TS_{Speicher}} \in \mathbb{R}$

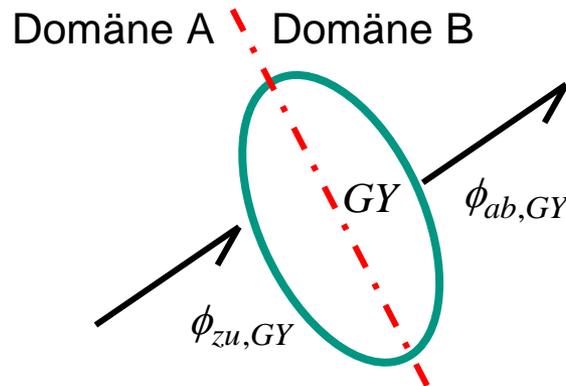


3.2 Methode der generalisierten Variablen

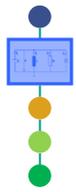
3.2.1 Komponenten und Bonds

■ Beispiele für Mehrfore sind:

- **Energie-Wandler und Energieverbinder (Junction)** mit
$$\sum_r \phi_{zu_r, TS_i} - \sum_p \phi_{ab_p, TS_i} = 0$$
- Gilt nun $\phi_{ab_p, TS_i} \in \mathbb{R}$ bezeichnet man den Wandler als **reversibel**. Spezielle reversible Wandler sind der **Transformator (TF)** und der Energie-Konverter bzw. **Gyrator (GY)**, der die Energie zwischen zwei Domänen konvertiert: z.B. elektrische Energie in mechanische Energie durch einen idealen elektr. Motor.

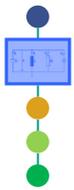


- Gilt hingegen $\forall p : \phi_{ab_p, TS_i} \geq 0$ bezeichnet man den Wandler als **irreversibel oder als dissipatives Element**. Der Energieabfluss erfolgt über Wärme (Man lässt dann häufig das zweite Tor weg!).



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.1 **Komponenten und Bonds**



3.2 Methode der generalisierten Variablen

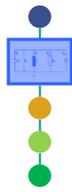
3.2.2 Generalisierte Variablen

■ Beispiel: elektrische Kapazität



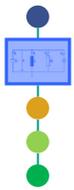
■ Energie:

■ Zeitliche Änderung der Energie:



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.2 **Generalisierte Variablen**



3.2 Methode der generalisierten Variablen

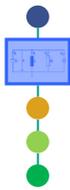
3.2.2 Generalisierte Variablen

- Offenbar findet der Energie-/Leistungsaustausch stets formal in der gleichen Weise statt.
- Es gibt eine **Flussgröße** (z.B.: Strom, Durchfluss, Kraft)
- Es gibt eine **Spannungsgröße**: (z.B.: Spannung, Druck)
- Teilsysteme haben formal gleiche Eigenschaften (z.B.: Kapazität als Energiespeicher)
- Die Definition von Strom und Spannung ist für nicht elektrische Domänen **nicht eindeutig**

- Für eine formale Definition sei nun **der Energiefluss**

$$P = \frac{dE}{dt} = \phi_{zu} - \phi_{ab} = \phi$$

von **Austauschvariablen** f_i abhängig $\phi(f_1, \dots, f_N)$.



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.2 Generalisierte Variablen

Erfüllt ϕ nun die Eigenschaft

$$\phi(\alpha f_1, \dots, \alpha f_N) = \alpha \phi(f_1, \dots, f_N) \quad (*)$$

dann gilt:

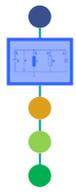
$$\frac{dE}{dt} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \phi(f_1, \dots, f_N)}{\partial f_j} f_j = \sum_{j=1}^N e_j f_j$$

Der Nachweis erfolgt durch Ableitung von (*) nach α

e_j bezeichnet man als **verallgemeinerte Spannung**

$$e_j = \frac{\partial \phi(f_1, \dots, f_N)}{\partial f_j}$$

Eine Austauschgröße f_j mit der Eigenschaft (*) bezeichnet man als **verallgemeinerten Strom**

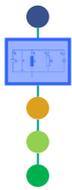


3.2

Methode der generalisierten Variablen

3.2.2

Generalisierte Variablen



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.2 Generalisierte Variablen

■ Weitere Definitionen:

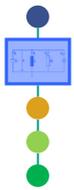
Generalisierter Impuls:

$$q_{f_j} = \int_{t_0}^t f_j(\tau) d\tau + q_{f_j}(t_0) \quad (\text{Akkumulierter Strom})$$

Generalisierte Auslenkung:

$$q_{e_j} = \int_{t_0}^t e_j(\tau) d\tau + q_{e_j}(t_0) \quad (\text{Akkumulierte Spannung})$$

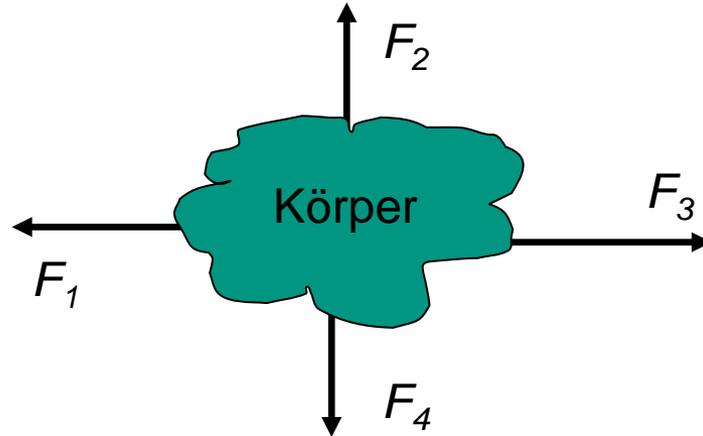
■ Beispiel:



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.3 Topologische Verknüpfungen

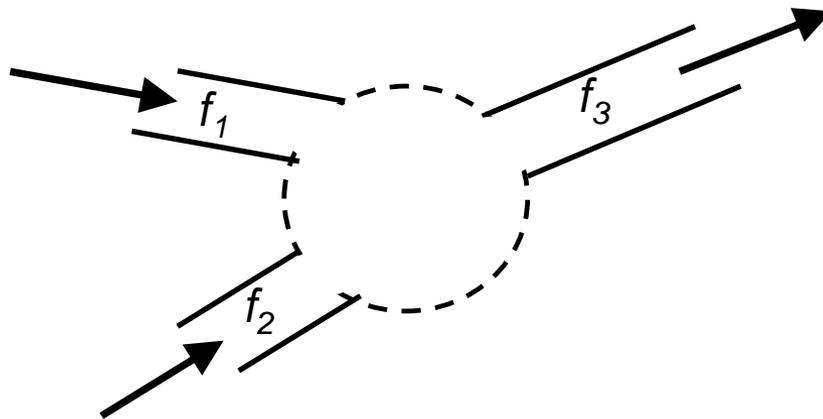
1) Beispiel: Mechanik: Statisches System



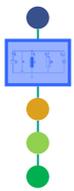
Statik bedeutet

$$\sum_{l=1}^4 F_l = 0$$

2) Beispiel: Hydraulisches System



$$\sum_{l=1}^3 f_l = 0$$



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.3 Topologische Verknüpfungen

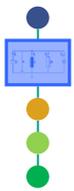
- Die Verbindung der Bonds nennt man **Junction**
- Die Verbindung ist **verlustlos** und **speicherfrei**
- **Weist der Bond in die Verbindung wird die Energie positiv gezählt.**
- **Es gibt zwei Verbindungsarten:**

Knoten: verallgem. Knoten, Kontinuität des Stroms oder „**0**“-**Junction**. Dabei gilt:

$$\sum_{l=1}^m f_l = 0 \quad \text{und die Spannungen der angeschlossenen Elemente sind gleich (gleiche Knotenspannung)}$$

Maschen: verallgem. Maschen, Kompatibilität der Spannungen oder „**1**“-**Junction**.

Dabei gilt $\sum_{j=1}^n e_j = 0$ und der Strom durch alle Elemente der Masche ist gleich (Maschenstrom)

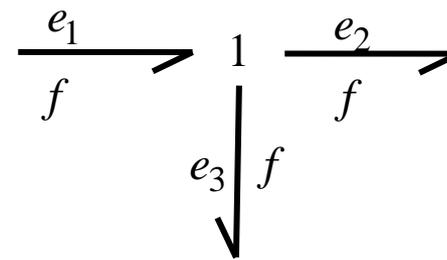
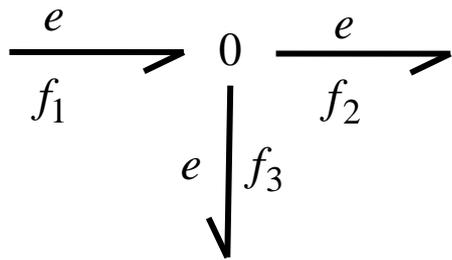


3.2 Methode der generalisierten Variablen

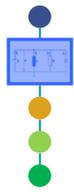
3.2.3 Topologische Verknüpfungen

■ Zwei Schreibweisen üblich:

■ Bond Graphen Darstellung

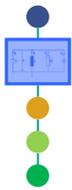


■ **Verallgemeinertes Ersatzschaltbild (ESB)** Übernahme der bekannten Symbolik aus der Elektrotechnik (d.h. Knoten werden als Stromknoten im Schaltbild und Maschen implizit durch die Verknüpfung der Bauelemente bestimmt)



3.2 Methode der generalisierten Variablen

3.2.3 Topologische Verknüpfung



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.1 Elektrische Eintore

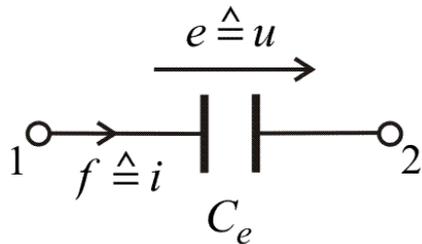
Elektr. Spannung $u \hat{=}$ verallgem. Spannung e

Elektr. Strom $i \hat{=}$ verallgem. Fluss f

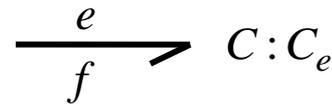
Elektrische Speicher

a) Kapazität

ESB Symbolik

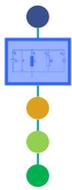


Bond Graphen Symbolik (bevorzugt)



$$i = \frac{dQ}{dt} \quad \text{oder} \quad Q = Q(u) = \int_0^t i(\tau) d\tau \hat{=} q_f$$

$$\Rightarrow u \hat{=} e = Q^{-1} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) \quad \text{Falls Kapazität linear gilt: } Q = C_e u \quad \text{und} \quad e = \frac{1}{C_e} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)$$

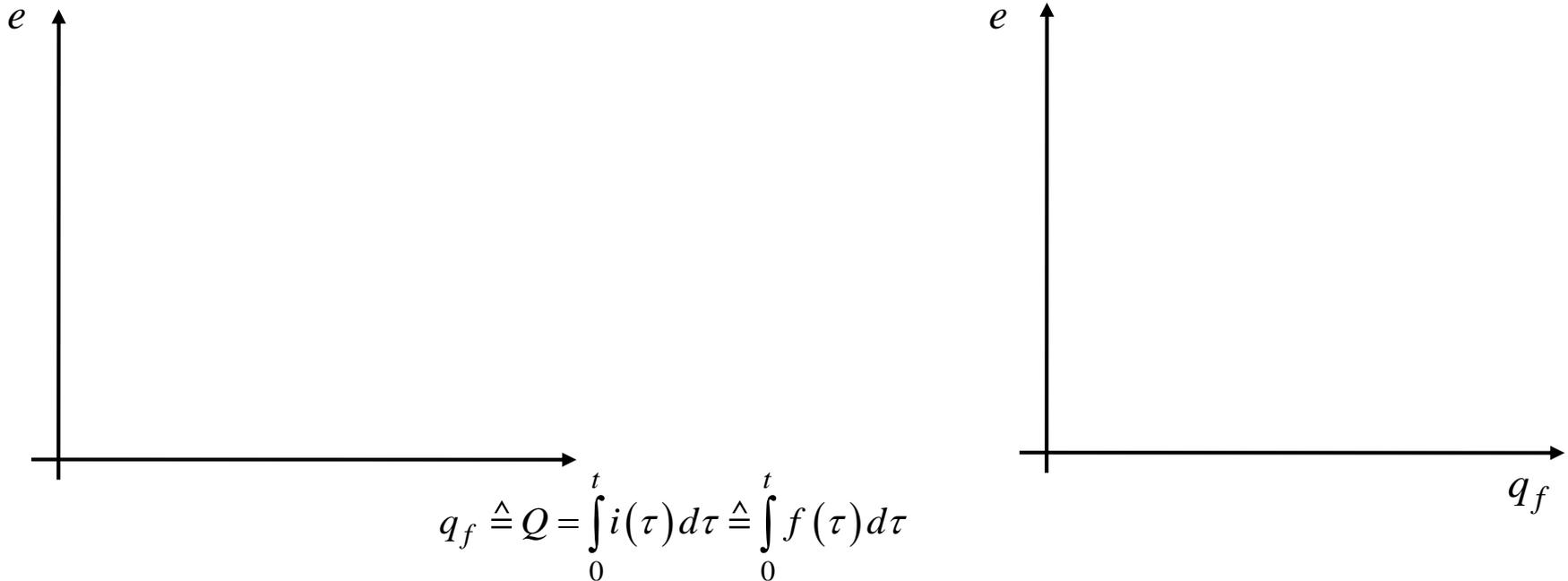


3.3 Grundlegende Systemelemente

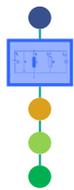
3.3.1 Elektrische Eintore

gespeicherte Energie:

$$T = \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t e(\tau) \frac{dQ}{d\tau} d\tau = \int_0^Q e(\tilde{Q}) d\tilde{Q}$$



Eine **verallg. Kapazität** ist ein Element, das den akkumulierten Strom q_f speichert:
Speicher vom q_f -Typ

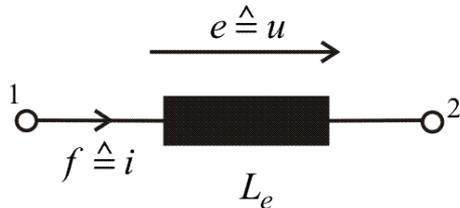


3.3 Grundlegende Systemelemente

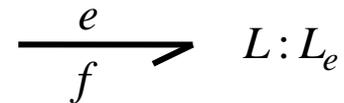
3.3.1 Elektrische Eintore

b) Induktivität

ESB Symbolik



Bond Graphen Symbolik (bevorzugt)



mit der **magn. Flussverkettung** ψ gilt aufgrund der Maxwellgleichung:

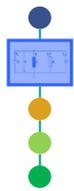
$$u = \frac{d\psi}{dt}$$

Bzw.

$$\psi(i) = \int_0^t u(\tau) d\tau \hat{=} q_e$$

$$i \hat{=} f = \psi^{-1} \left(\int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

Falls Spule linear gilt: $\psi = L_e i$ und $f = \frac{1}{L_e} \left(\int_0^t e(\tau) d\tau \right)$

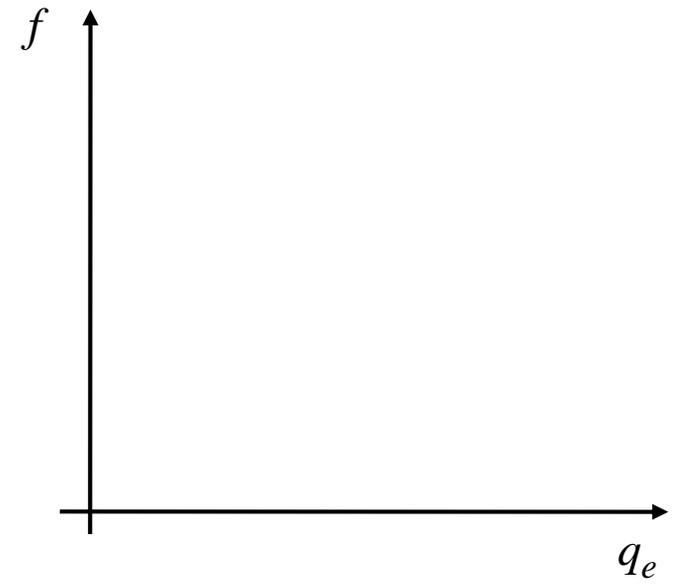
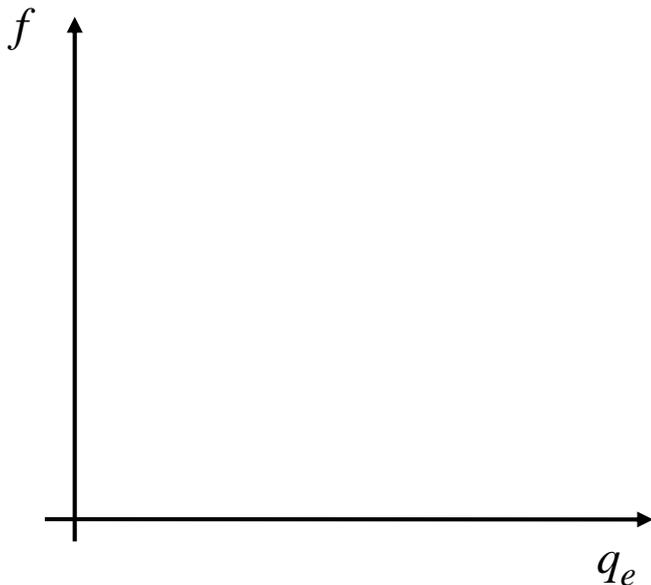


3.3 Grundlegende Systemelemente

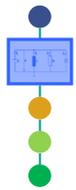
3.3.1 Elektrische Eintore

gespeicherte Energie der Induktivität:

$$U = \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{\Psi} f(q_e) d\tilde{\psi}$$



Eine verallgemeinerte Induktivität speichert die akkumulierte verallgemeinerte Spannung q_e :
Speicher vom q_e -Typ

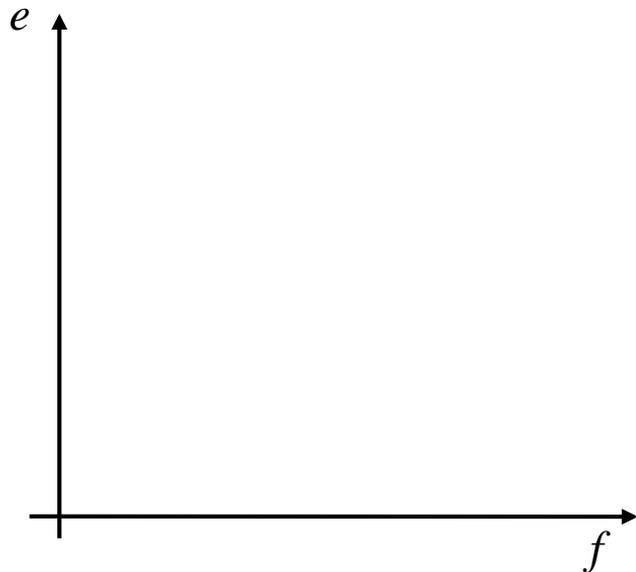
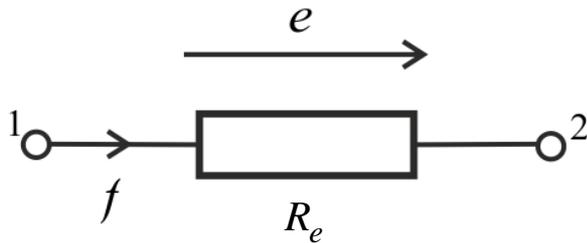


3.3 Grundlegende Systemelemente

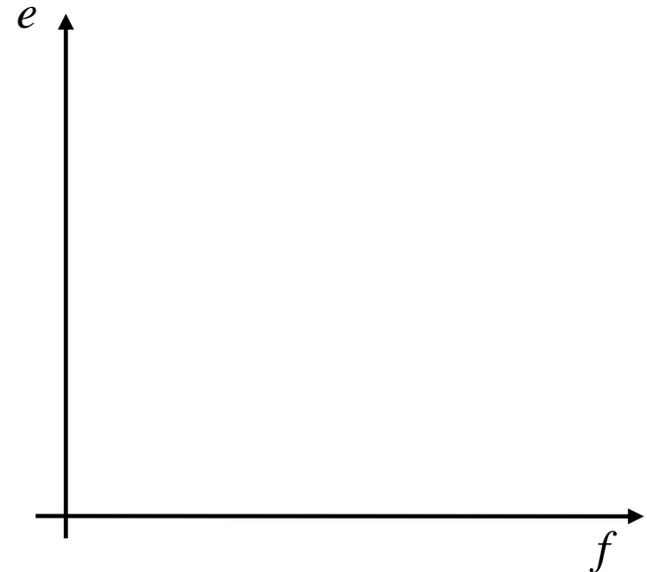
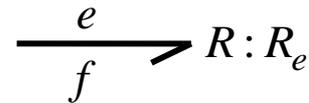
3.3.1 Elektrische Eintore

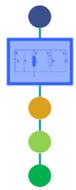
c) Widerstand

ESB Symbolik



Bond Graphen Symbolik (bevorzugt)





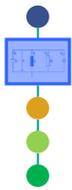
3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.1

Elektrische Eintore

	generalisierte Auslenkung q_e	generalisierter Impuls q_f	generalisierter Fluss f	generalisierte Spannung e
elektrisch	magn. Flussverkettung ψ	elektrische Ladung Q	elektrischer Strom $i = \dot{Q}$	elektrische Spannung $u = \dot{\psi}$
mechanisch				
translatorisch				
rotatorisch				
hydraulisch				
pneumatisch				



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.2 Mechanische Systeme

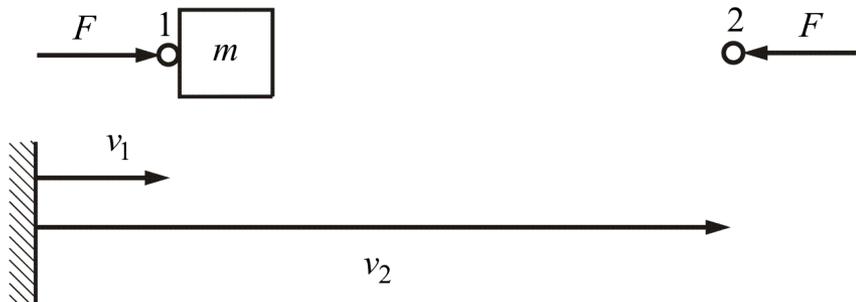
Mobilitätsanalogie:

Die **Geschwindigkeit** entspricht einer **verallgemeinerten Spannung**

Die **Kraft** entspricht einem **verallgemeinerten Strom** (Impulsfluss)

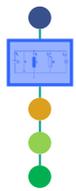
A) Translatorische Systeme

a) Speicherelemente: bewegte Masse



$$\dot{p} = m \cdot \dot{v} = F$$

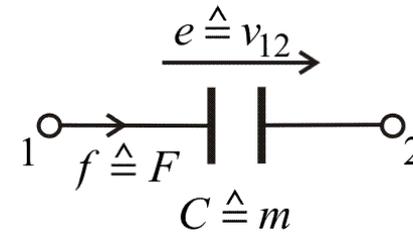
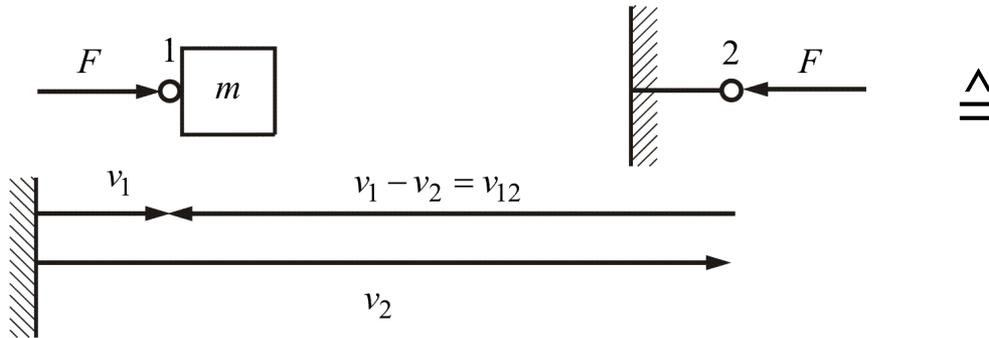
$$p \hat{=} q_f = \int_0^t f d\tau \hat{=} \int_0^t F d\tau$$



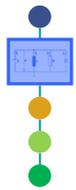
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.2 Mechanische Eintore

Energie:
$$T = \int_0^t v(\tau) F(\tau) d\tau \hat{=} \int_0^t e(\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{q_f} e dq_f$$



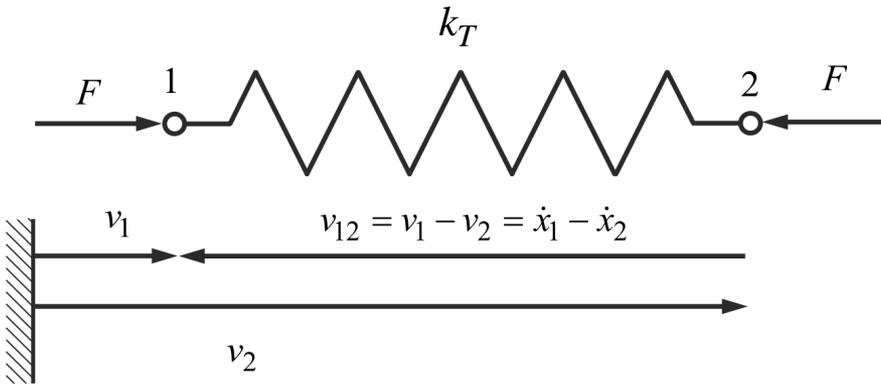
sinnvoll: Punkt 2 als Inertialsystem festlegen, also $v_2 = 0$



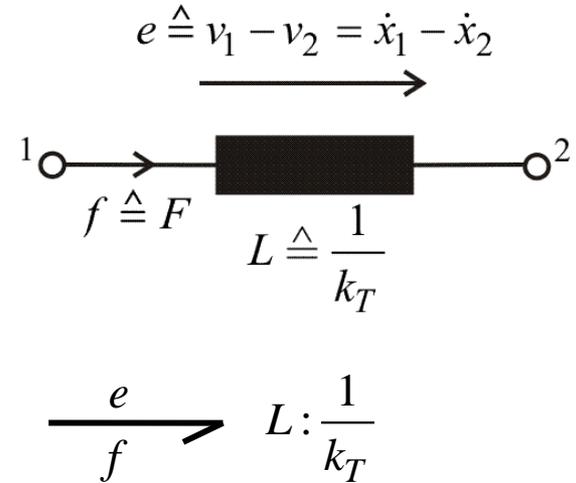
3.3 Grundlegende Systemelemente

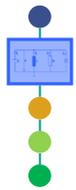
3.3.2 Mechanische Eintore

b) Speicherelemente: Feder



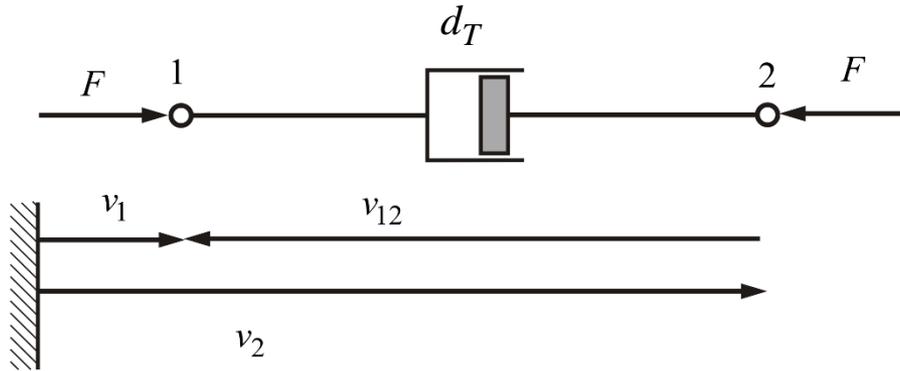
$\hat{=}$



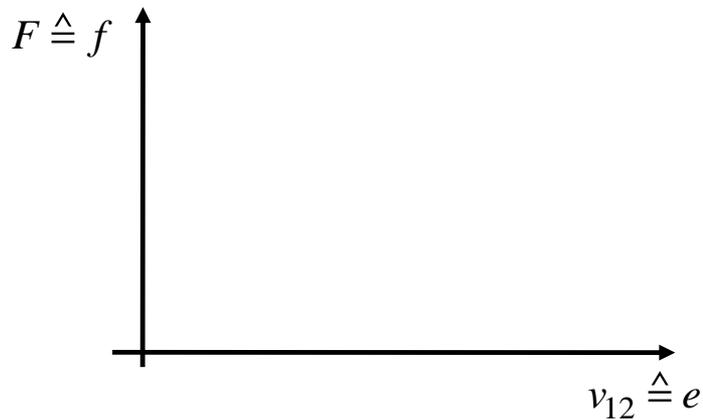
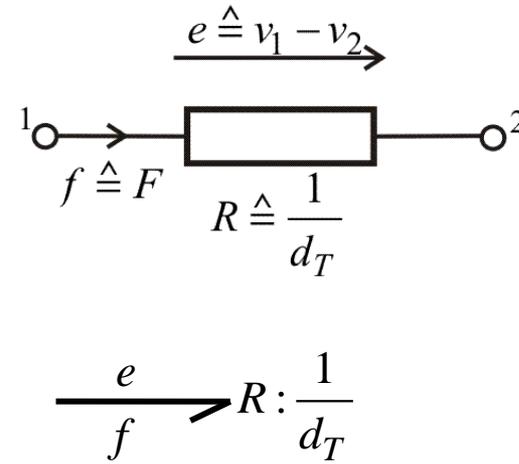


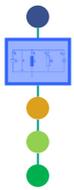
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.2 Mechanische Eintore



$\hat{=}$



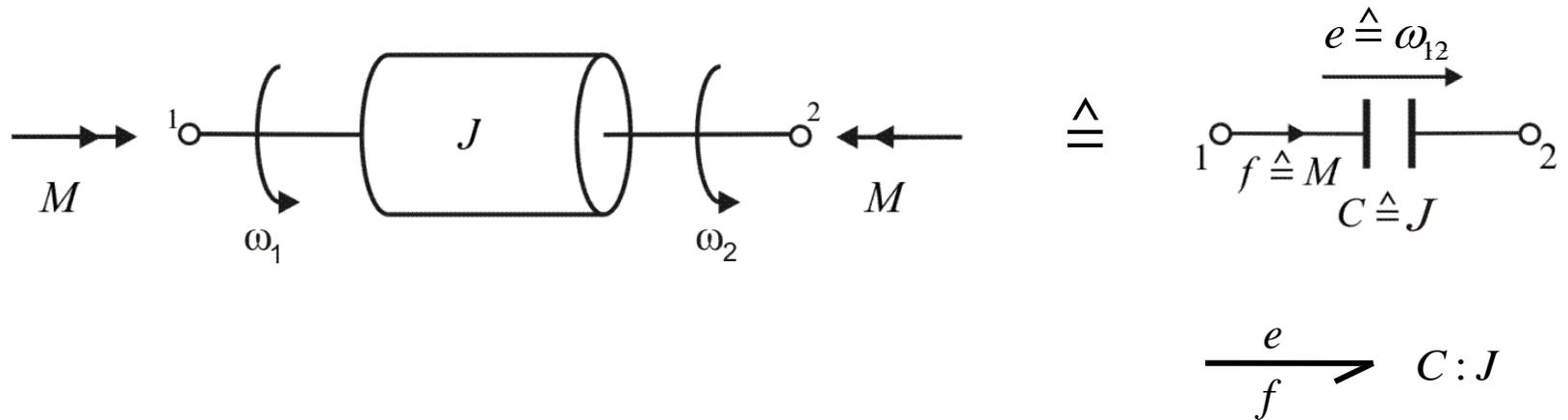


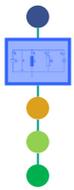
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.2 Mechanische Eintore

B) Rotatorische Systeme

a) rotierende Masse

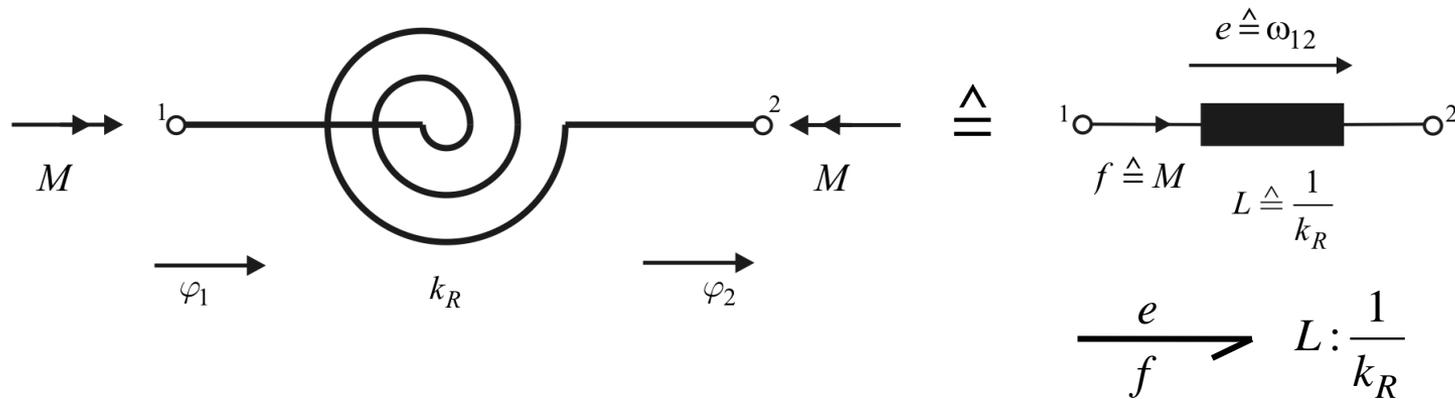




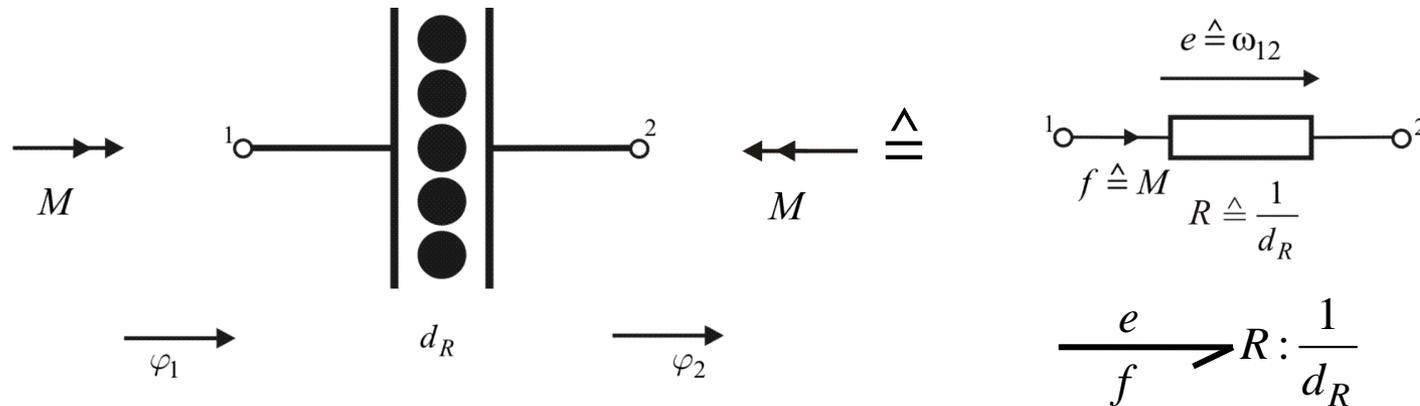
3.3 Grundlegende Systemelemente

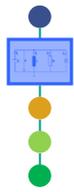
3.3.2 Mechanische Eintore

b) Torsionsfeder



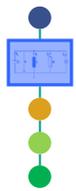
c) Torsionsdämpfer





3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.2 Mechanische Eintore



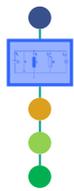
3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.2

Mechanische Systeme - generalisierte Größen

	generalisierte Auslenkung q_e	generalisierter Impuls q_f	generalisierter Fluss f	generalisierte Spannung e
elektrisch	magn. Flussverkettung ψ	elektrische Ladung Q	elektrischer Strom $i = \dot{Q}$	elektrische Spannung $u = \dot{\psi}$
mechanisch	mechanischer Weg x	mechanischer Impuls p	Kraft $F = \dot{p}$	Lineare Geschwindigkeit $v = \dot{x}$
translatorisch				
rotatorisch	Winkelauslenkung φ	Drall L	Drehmoment $M = \dot{L}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
hydraulisch				
pneumatisch				



3.3 Grundlegende Systemelemente

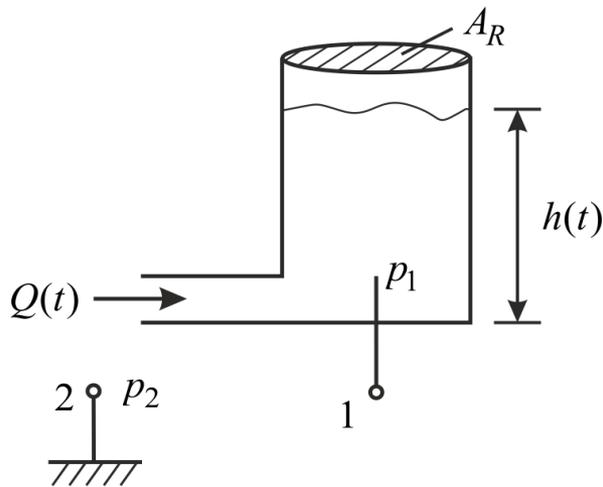
3.3.3 Hydraulische Systeme

Definition „Volumenstrom“: $Q = \frac{dV}{dt}$ entspricht verallgemeinertem Strom.

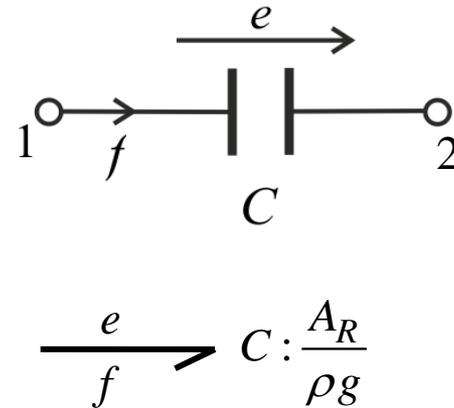
Druck entspricht verallgemeinerter Spannung.

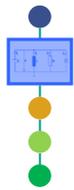
Speicherelemente (Herleitung siehe Beginn des Kapitels)

a) Tank



\triangleq

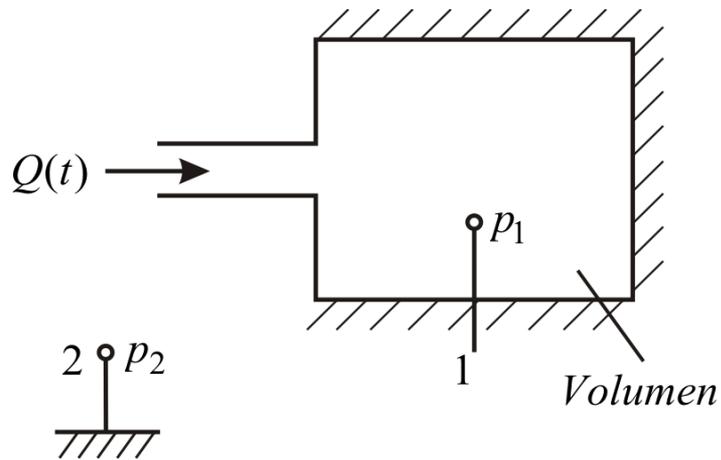




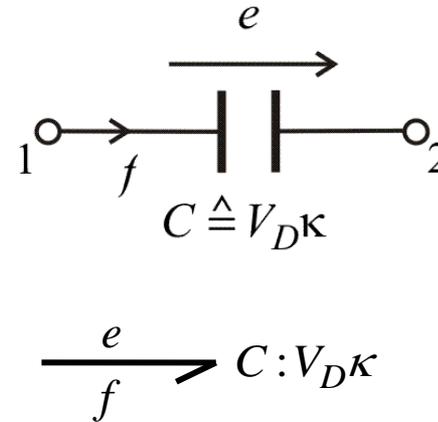
3.3 Grundlegende Systemelemente

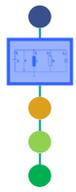
3.3.3 Hydraulische Systeme

b) Drucktank



$\hat{=}$



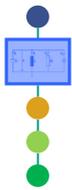


3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.3

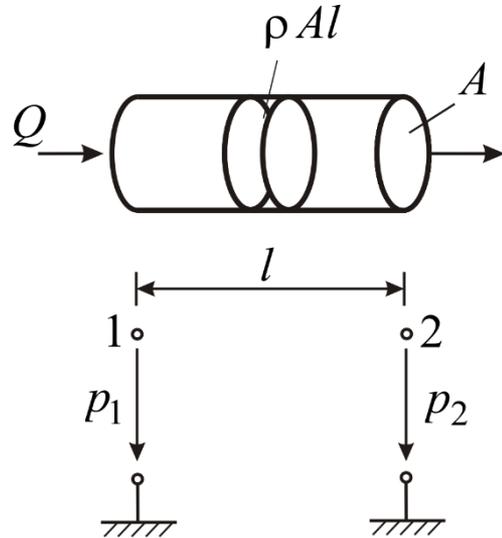
Hydraulische Systeme



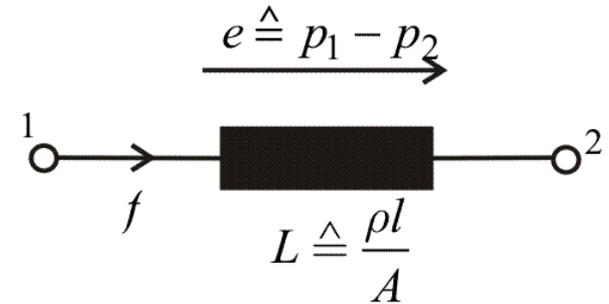
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.3 Hydraulische Systeme

c) Ideale hydraulische Leitung



$\hat{=}$



Herleitung: $F = A \cdot p_{12} = \rho \cdot A \cdot l \cdot \frac{dv}{dt}$

$$\dot{Q} = A \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$p_{12} = \rho \cdot l \cdot \frac{dv}{dt}$$

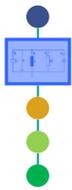
$$p_{12} = \frac{\rho \cdot l}{A} \cdot \frac{dQ}{dt}$$

v : Fließgeschwindigkeit

ρ : Dichte des Fluids

A : Rohrquerschnitt

l : Rohrlänge

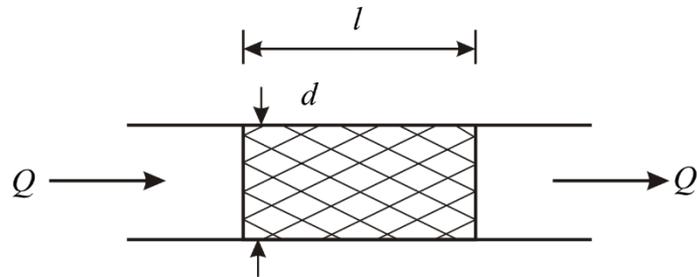


3.3 Grundlegende Systemelemente

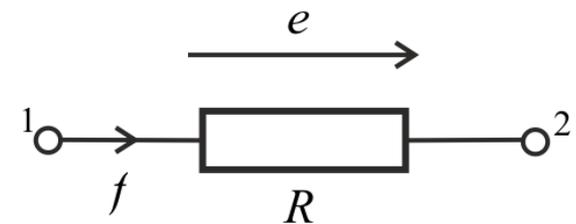
3.3.3 Hydraulische Systeme

Hydraulische Widerstände

- 1) aufgrund viskoser Reibung an den Leitungen
- 2) aufgrund Reibung der Teilchen untereinander



$\hat{=}$



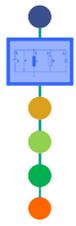
$$\frac{e}{f} \rightarrow R: \frac{128 \cdot \mu \cdot l}{\pi \cdot d^4}$$

Laminare Strömung: Gesetz von Hagen-Poiseuille $R = \frac{128 \cdot \mu \cdot l}{\pi \cdot d^4}$

μ : Viskosität der Flüssigkeit

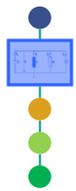
l : Rohrlänge

d : Rohrquerschnitt



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.3 Hydraulische Systeme



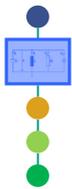
3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.3

Hydraulische Systeme - generalisierte Größen

	generalisierte Auslenkung q_e	generalisierter Impuls q_f	generalisierter Fluss f	generalisierte Spannung e
elektrisch	magn. Flussverkettung ψ	elektrische Ladung Q	elektrischer Strom $i = \dot{Q}$	elektrische Spannung $u = \dot{\psi}$
mechanisch	mechanischer Weg x	mechanischer Impuls p	Kraft $F = \dot{p}$	Lineare Geschwindigkeit $v = \dot{x}$
translatorisch				
rotatorisch	Winkelauslenkung φ	Drall L	Drehmoment $M = \dot{L}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
hydraulisch	Druckimpuls i_n	Volumen V	Volumenstrom $Q = \dot{V}$	Druck $p = \dot{i}_n$
pneumatisch				



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Pneumatische Systeme

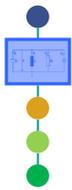
Annahmen:

- Kleine gasgefüllte Räume, deren Abmessungen deutlich kleiner als die Wellenlänge des Gasmediums sind.
- Teilsysteme müssen so aufgebaut sein, dass der Druck unabhängig vom Ort ist oder ein- und ausfließender Volumenfluss gleich sind.

Analogie:

Volumenfluss $Q = \frac{dV}{dt}$ entspricht verallgemeinertem **Strom** f .

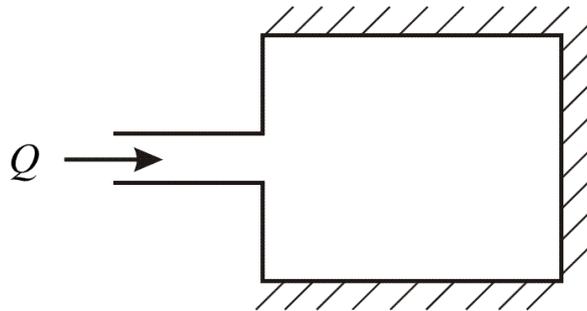
Druck p entspricht verallgemeinerter **Spannung** e .



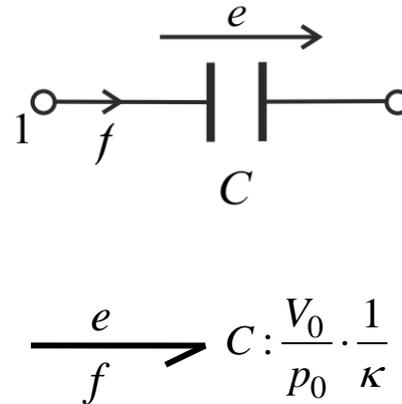
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Pneumatische Systeme

Speicherelemente



$\hat{=}$



Herleitung: für ideales Gas der Menge ν mol gilt

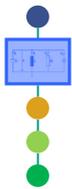
$$p_1 \cdot V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1$$

mit T : Temperatur

R : Gaskonstante $8.31 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

Linearisierung um ein Volumen V_0 , Druck p_0 , Temperatur T_0 :

$$p_0 \cdot \Delta V + V_0 \cdot \Delta p = \nu \cdot R \cdot \Delta T \quad (1) \quad \Delta T = T_1 - T_0, \Delta V = V_1 - V_0, \Delta p = p_1 - p_0$$



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Pneumatische Systeme

Aus dem erstem Hauptsatz der Thermodynamik ergibt sich für eine **adiabatische** Zustandsänderung (kein Wärmeaustausch):

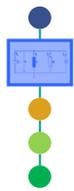
$$0 = \nu \cdot c_v \cdot \Delta T - p_0 \cdot \Delta V \quad (2) \quad c_v: \text{spez. Wärme}$$

aus (1) und (2):

$$-\frac{\Delta V}{\Delta p} = \frac{V_0}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R}{c_v}} = \frac{V_0}{p_0} \cdot \frac{1}{\kappa} \quad \kappa: \text{Adiabatexponent}$$

Aufgrund der Pfeilkonvention und Definition einer Kapazität gilt:

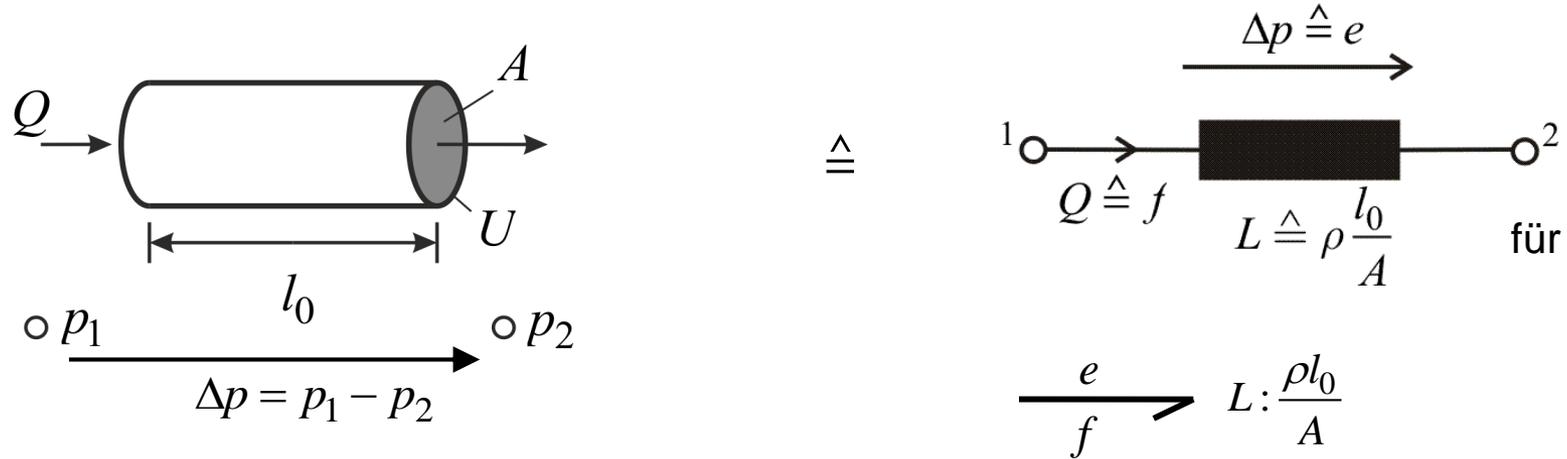
$$\Delta \dot{V} \hat{=} -f \quad \text{und} \quad C = \frac{V_0}{p_0} \cdot \frac{1}{\kappa}$$



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Pneumatische Systeme

Induktivität: bewegtes Gasvolumen in idealem Rohr



Damit Gas als Induktivität beschrieben werden kann muss gelten:

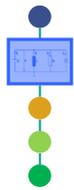
$$f_A \gg f_g$$

$$l_0 \gg \frac{A}{U}$$

f_A : Anregungsfrequenz

μ : Zähigkeit des Mediums

$$2\pi f_g = \frac{2\mu}{\rho \cdot R_{\ddot{a}}^2} \quad R_{\ddot{a}} = \frac{A}{U}$$

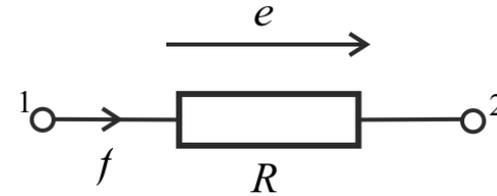
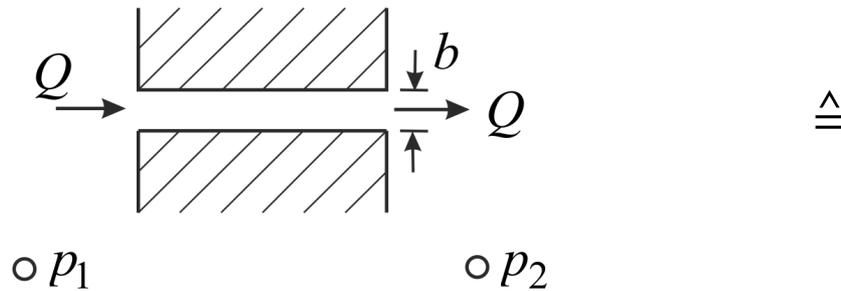


3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Pneumatische Systeme

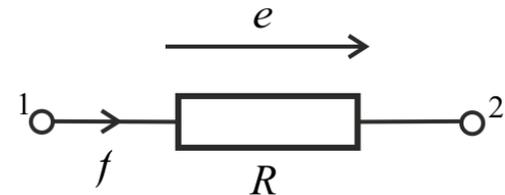
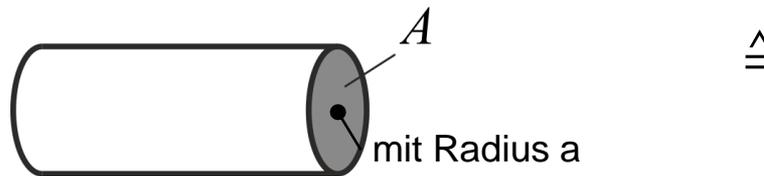
Widerstand:

a) sehr enger Kanal/enges Rohr mit Querschnitt A



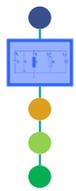
$$\frac{e}{f} \rightarrow R: \frac{l}{A} \cdot 12 \cdot \mu \cdot \frac{1}{b^2}$$

b) poröses Material im Rohr



$$\frac{e}{f} \rightarrow R: \frac{l}{A} \cdot 8 \cdot \mu \cdot \frac{1}{a^2}$$

μ : Zähigkeit des Mediums, $\mu_{Luft} = 1,8 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$



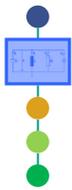
3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.4

Übersicht: generalisierte Größen

	generalisierte Auslenkung q_e	generalisierter Impuls q_f	generalisierter Fluss f	generalisierte Spannung e
elektrisch	magn. Flussverkettung ψ	elektrische Ladung Q	elektrischer Strom $i = \dot{Q}$	elektrische Spannung $u = \dot{\psi}$
mechanisch translatorisch	mechanischer Weg x	mechanischer Impuls p	Kraft $F = \dot{p}$	Lineare Geschwindigkeit $v = \dot{x}$
rotatorisch	Winkelauslenkung φ	Drall L	Drehmoment $M = \dot{L}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$
hydraulisch	Druckimpuls i_n	Volumen V	Volumenstrom $Q = \dot{V}$	Druck $p = \dot{i}_n$
pneumatisch	Druckimpuls i_n	Volumen V	Volumenstrom $Q = \Delta V$	Druck $p = \Delta i_n$

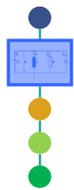


3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Energien für lineare Systeme

Wenn linear, dann gilt: $U = U^*$ und $T = T^*$

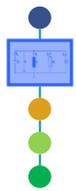
	$U = U^*$	$T = T^*$	Dissipative Elemente
Masse	$(-mgx)$	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	
Feder	$\frac{1}{2}kx^2$		
Dämpfer			$\frac{1}{2}d\dot{x}^2$
Elektr. Kapazität		$\frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2C}q^2$	
Elektr. Induktivität	$\frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$		
Elektr. Widerstand			$\frac{1}{2}Ri^2$



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.4 Energien für lineare Systeme

	$U = U^*$	$T = T^*$	Dissipative Elemente
Hydr. Tank		$\frac{1}{2} \frac{A_R}{\rho g} p^2$	
Hydr. Drucktank		$\frac{1}{2} V_D \kappa p^2$	
Hydr. Induktivität	$\frac{1}{2} \frac{\rho l}{A} p^2$		
Hydr. Widerstand			$\frac{1}{2} \frac{8\mu l}{\pi R^4} p^2$
Pneum. Tank		$\frac{1}{2} \frac{V_0}{p_0 \kappa} p^2$	
Pneum. Induktivität	$\frac{1}{2} \rho \frac{l_0}{A} p^2$		
Pneum. Widerstand			$\frac{1}{2} \frac{12l\mu}{Ab^2} p^2$



3.3

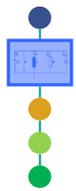
Grundlegende Systemelemente

3.3.5

Einführung: Gekoppelte Systeme



- Systeme können innerhalb einer Domäne gekoppelt werden (mechanisch, mechanisch)
- oder über Domänen hinweg (elektrisch, mechanisch)
- die Beschreibung der Kopplung erfolgt über **Mehrtore**
- Die Wandler/Koppler können dabei **speicherfrei sein (leistungserhaltend)** oder **aufgrund ihres Funktionsprinzips Energie speichern**

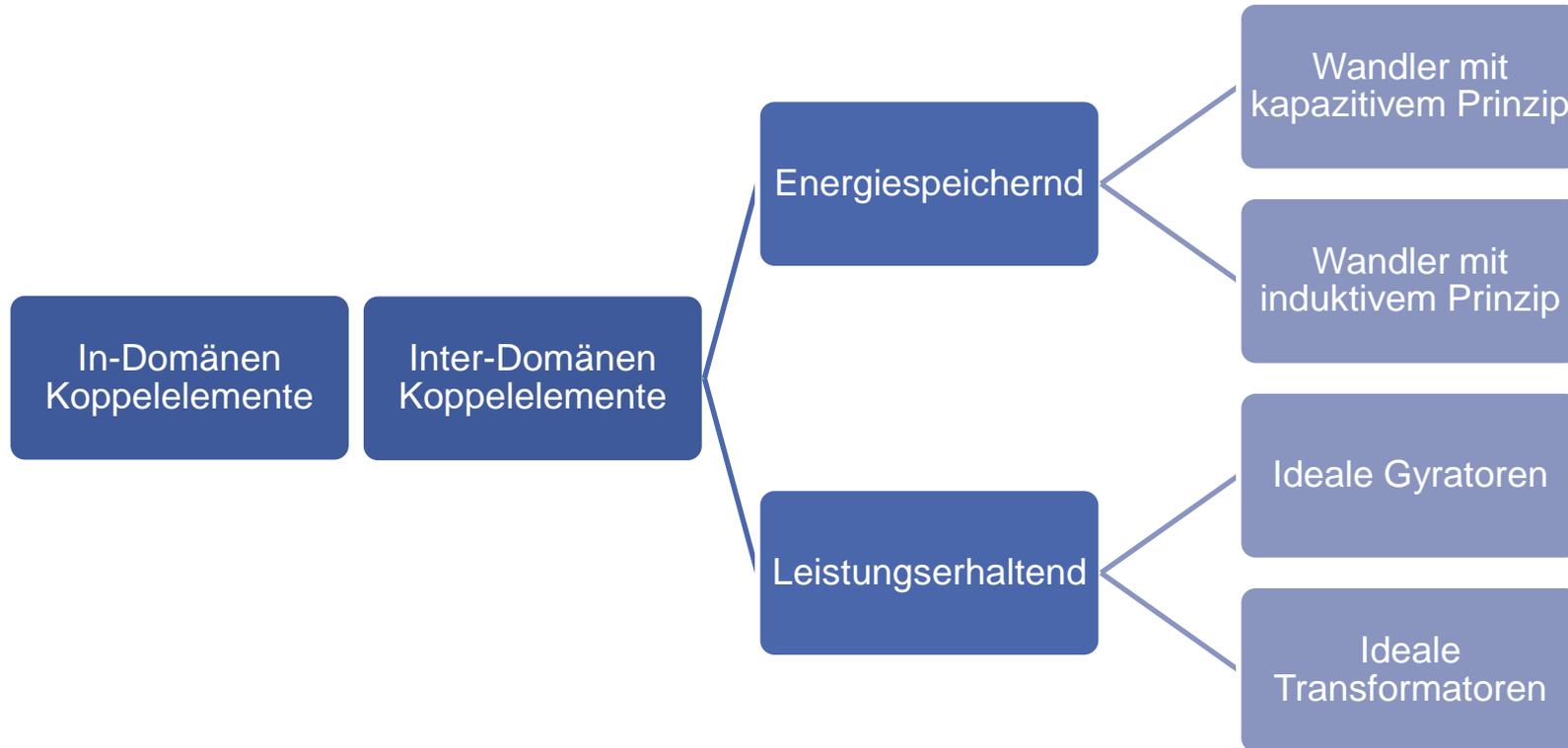


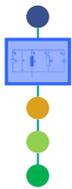
3.3

Grundlegende Systemelemente

3.3.5

Idealisierte Wandler



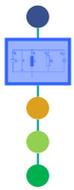


3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Leistungserhaltende Wandler

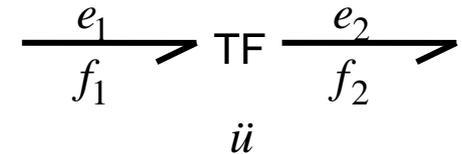
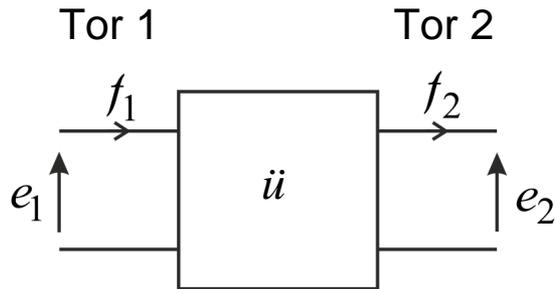
- **Grundbeziehung:** $\phi_{zu TS_i} = \phi_{ab TS_i}$
- **Alle dissipativen Phänomene können einer Domäne zugeordnet werden**
→ **Aufteilung in Dissipative Bauelemente und ideale Wandlung möglich**
- **Sollten Energiespeicher dennoch vorliegen, so lassen sich diese Anteile jeweils einer der Domänen direkt zuschlagen und können ebenfalls getrennt betrachtet werden**

→ **Speicherelemente werden durch Eintore am jeweiligen Tor des Wandlers betrachtet**



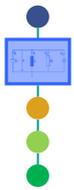
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Transformatoren

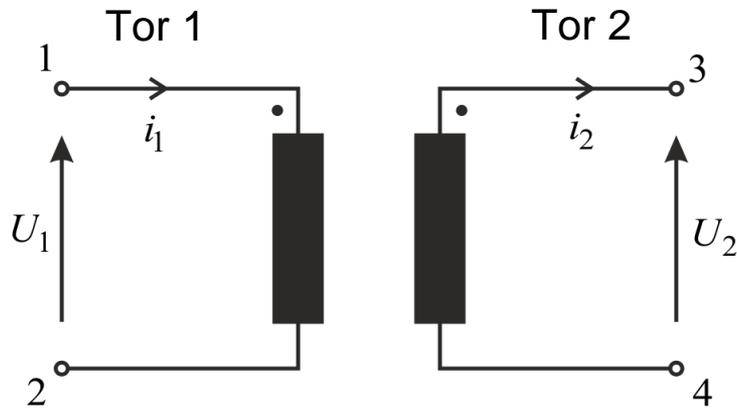


■ beschreibende Gleichung:

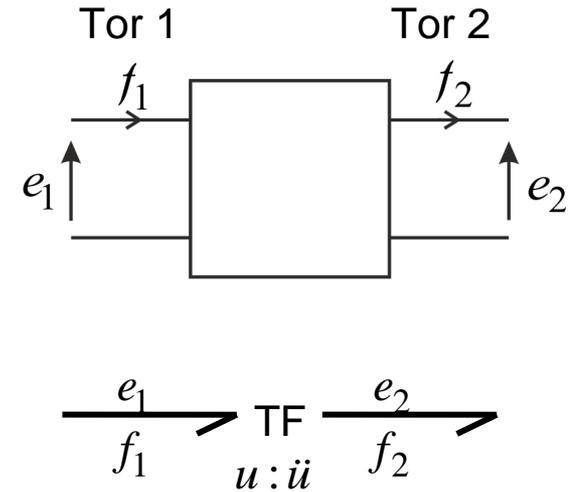
$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$



a) Elektrischer Trafo (ideal):



$\hat{=}$



Magn. Flussverkettung:

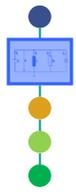
$$\psi_1 = L_{11} \cdot i_1 - M_{12} \cdot i_2 ; \quad u_1 = \frac{d\psi_1}{dt}$$

$$\psi_2 = M_{21} \cdot i_1 - L_{22} \cdot i_2 ; \quad u_2 = \frac{d\psi_2}{dt}$$

Ableitung und Darstellung in verallgemeinerten Variablen:

$$e_1 = L_{11} \cdot \dot{f}_1 + M_{12} \cdot \dot{f}_2$$

$$e_2 = M_{21} \cdot \dot{f}_1 + L_{22} \cdot \dot{f}_2$$

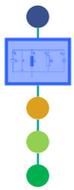


3.3

Grundlegende Systemelemente

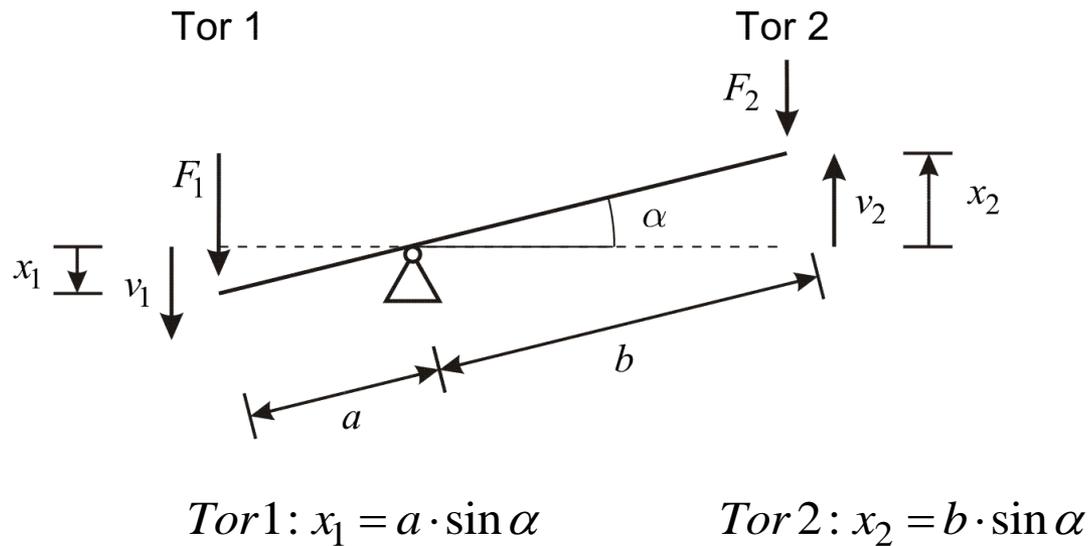
3.3.6

Transformatoren

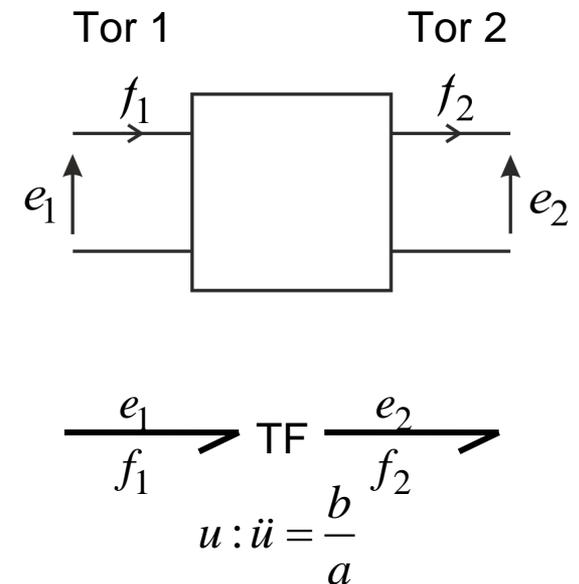


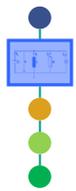
b) Mechanischer Transformator

■ Translatorisch



$\hat{=}$

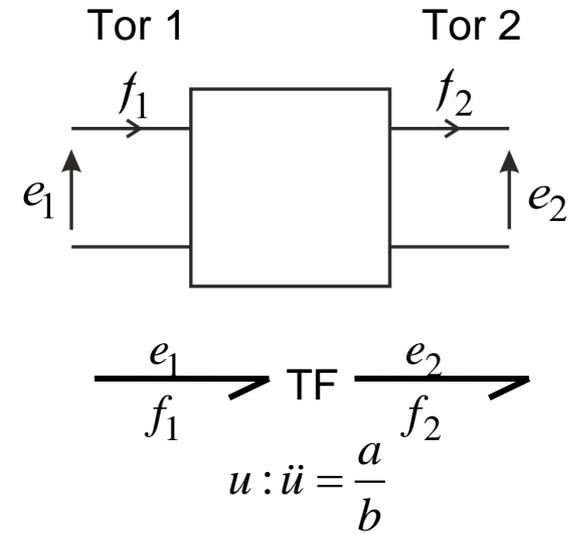
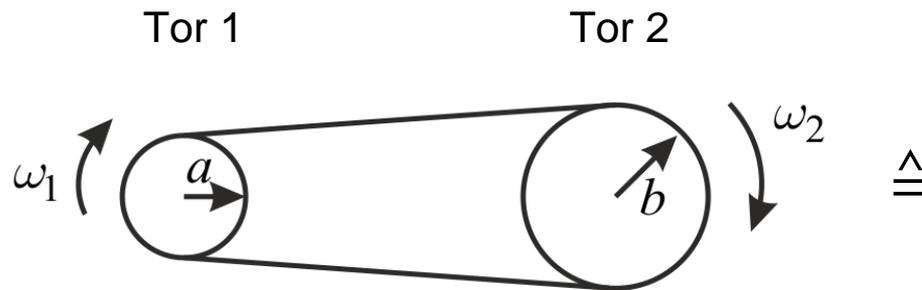


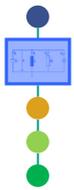


3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Transformatoren

■ Rotatorisch





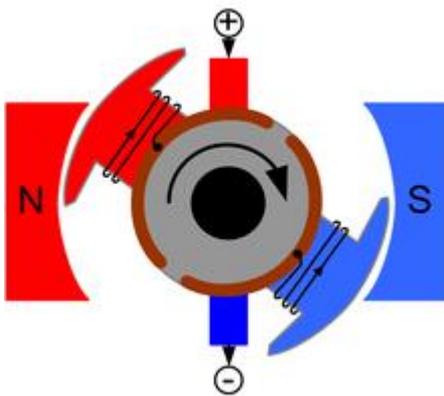
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Transformatoren

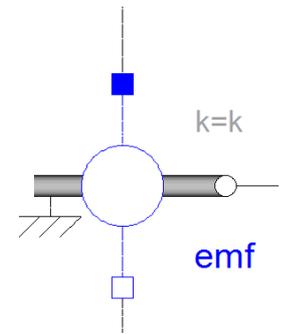
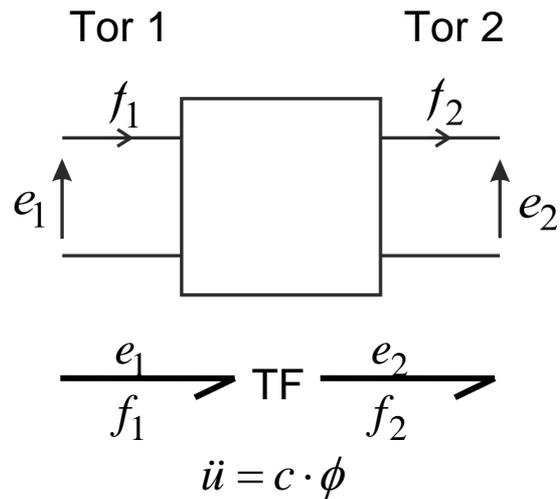
c) Elektrisch mechanisch (elektrodynamischer Wandler)

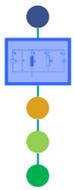
idealer Gleichstrommotor/-generator (ohne ohmsche Verluste, Reibungsverluste...)

Kopplungsbeziehung:		
Drehmoment:	$c \cdot \phi \cdot i = M$	$f_2 = \ddot{u} \cdot f_1$
induzierte Spannung:	$\omega \cdot c \cdot \phi = u$	$e_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot e_1$



\triangleq

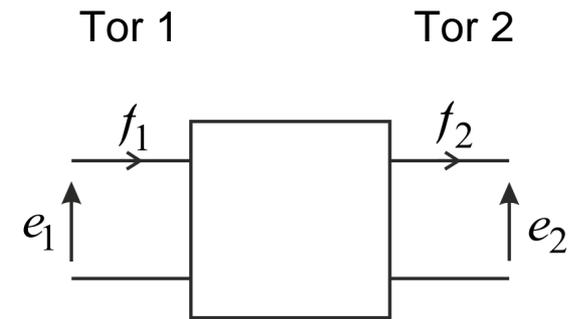
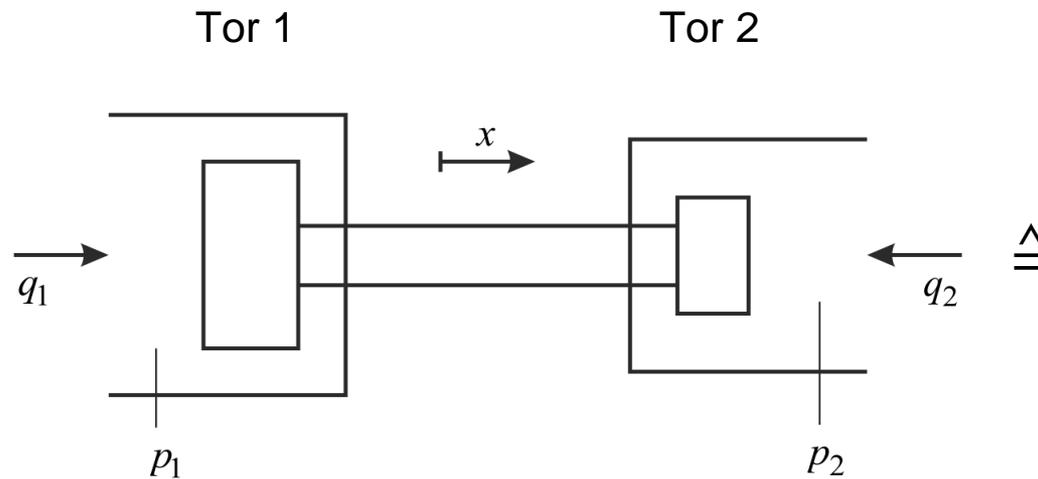




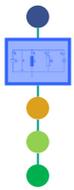
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Transformatoren

c) Hydraulisch (masselose Kolbenverbindung)

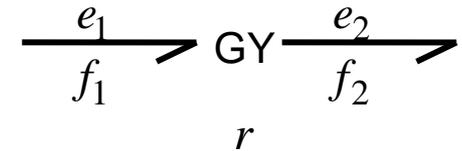
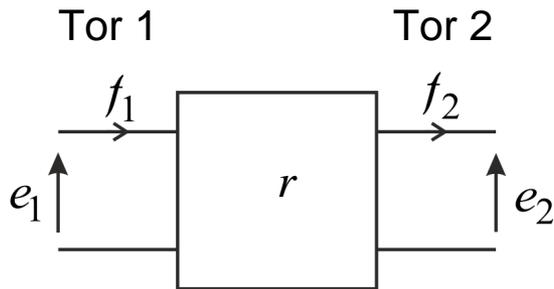


$$\frac{e_1}{f_1} \text{ TF } \frac{e_2}{f_2}$$
$$u : \ddot{u} = \frac{A_1}{A_2}$$



3.3 Grundlegende Systemelemente

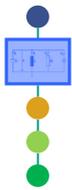
3.3.6 Gyratoren



■ Sind leistungserhaltend: $\phi_{zu} TS_i = \phi_{ab} TS_i$

■ beschreibende Gleichung:

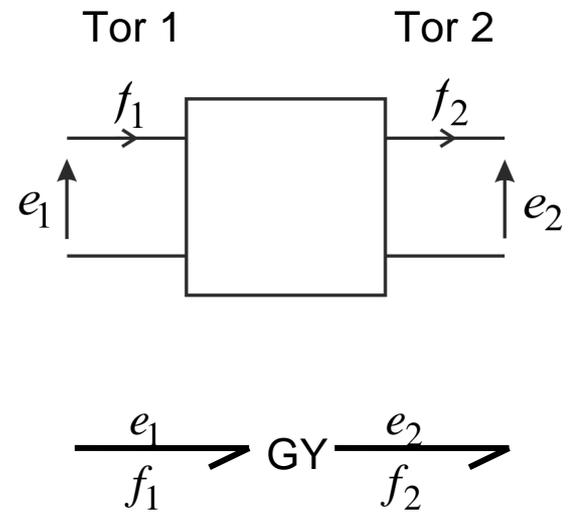
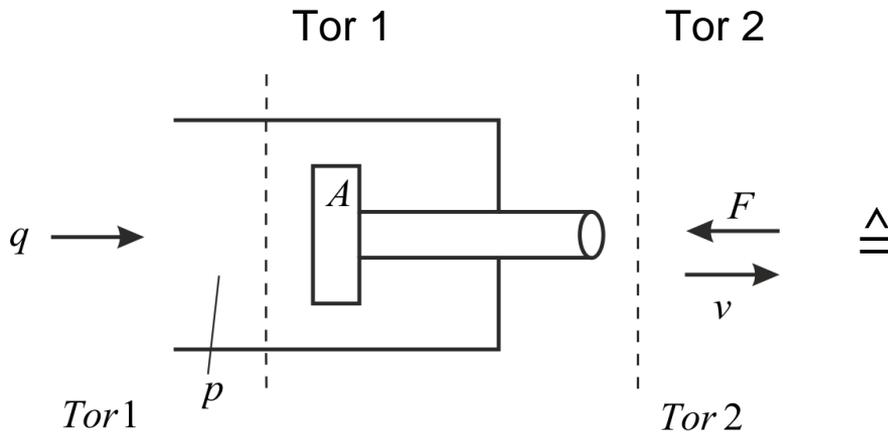
$$\begin{bmatrix} e_1 \\ f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & r \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_2 \\ f_2 \end{bmatrix}$$



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.6 Gyratoren

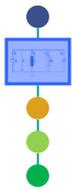
Hydraulisch mechanisch



Kopplungsbeziehung:

$$v = \frac{1}{A} \cdot q \rightarrow f_1 = \frac{1}{r} \cdot e_2$$

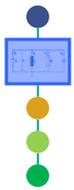
$$F = A \cdot p \rightarrow r \cdot f_2 = e_1, \quad r = \frac{1}{A}$$



3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.7 Energiespeichernde Wandler

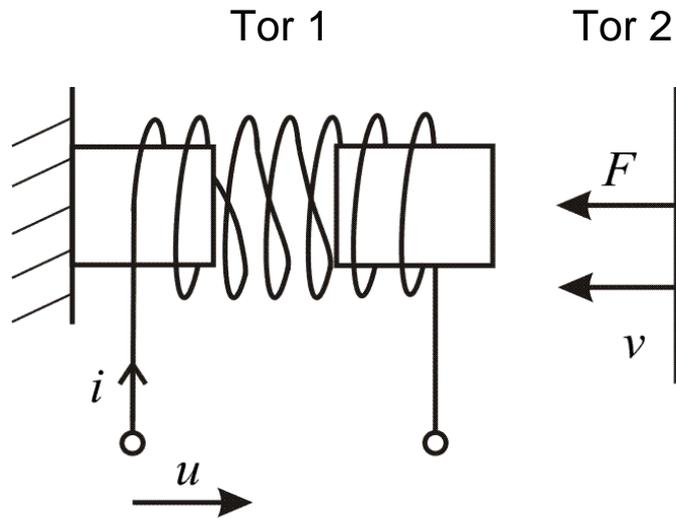
- Bei energiespeichernden Wandlern **kann die Speicherfunktion nicht von der Transformation der Energie** getrennt werden.
- Die dissipativen Effekte können jedoch getrennt betrachtet werden
- Unterschieden wird nach Art der Speicherung:
 - **Kapazitive Wandler**
 - **Induktive Wandler**
 - Hier nicht betrachtet Piezo-Wandler. (Bilden eigene Wandlerklasse)



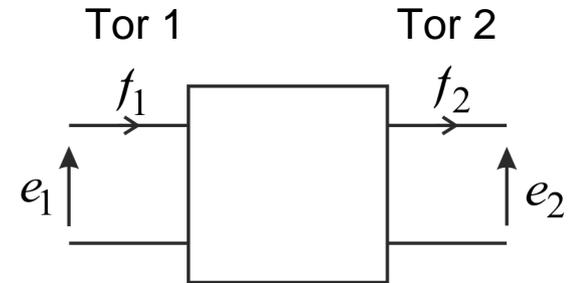
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.7 Energiekoppler

a) Elektrisch mechanisch (elektrodynamischer Wandler)



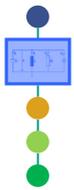
$\hat{=}$



Kopplungsbeziehung:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot L(x) \cdot i^2$$

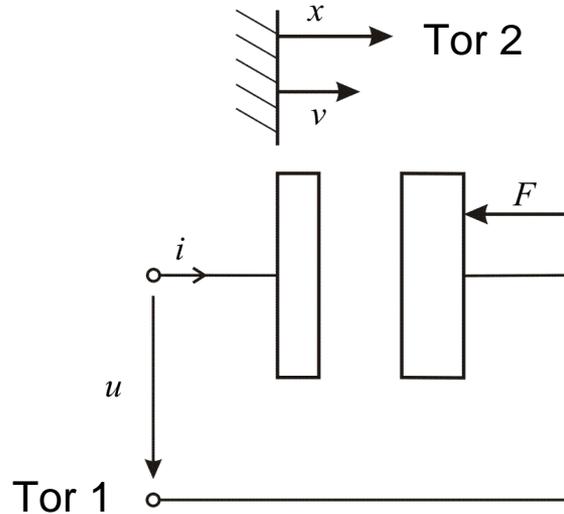
$$u = L(x) \cdot \frac{di}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot L(x) \cdot i \cdot v$$



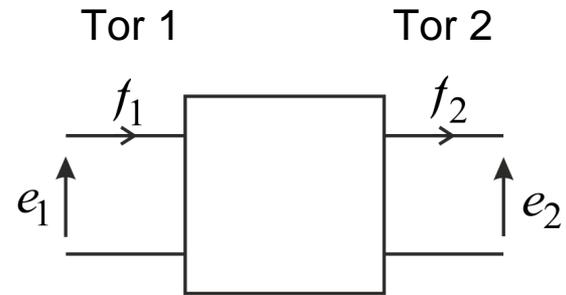
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.7 Energiekoppler

b) Elektrisch mechanisch (elektrostatische Wandler)



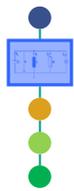
$\hat{=}$



Kopplungsbeziehung:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot C(x) \cdot u^2$$

$$i = C(x) \cdot \dot{u} + \frac{\partial}{\partial x} \cdot C(x) \cdot u \cdot v$$



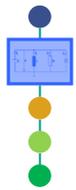
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.8 Kondensatorgeometrien

	Wandlertyp	Wandlermodell
A	<p>Plattenwandler – transversal variabler Elektrodenabstand</p>	$x < d_0$ $C(x) = \frac{\epsilon A}{d_0 - x}$ $F_d(x, U) = \frac{1}{2} U^2 \frac{\epsilon A}{(d_0 - x)^2}$
B	<p>Kipp-Plattenwandler variabler Elektrodenabstand</p>	$l \gg d$ $C(\varphi) = -\frac{\epsilon b}{\varphi} \ln \left(1 - \frac{l\varphi}{d} \right)$ $\tau_{el}(\varphi, U) = \frac{\epsilon A}{2} U^2 \left[\frac{\ln \left(1 - \frac{l\varphi}{d} \right)}{l\varphi^2} + \frac{1}{d\varphi \left(1 - \frac{l\varphi}{d} \right)} \right]$ <p>Approximation-1 für $\varphi \ll 1$</p> $C(\varphi) \approx \frac{\epsilon A}{d - \frac{l}{2}\varphi}$ $\tau_{el}(\varphi, U) \approx \frac{\epsilon A l}{2} U^2 \frac{1}{\left(d - \frac{l}{2}\varphi \right)^2}$ <p>Approximation-2 für $\varphi \ll 1$</p> $C(\varphi) \approx \frac{\epsilon b l}{d} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{l\varphi}{d} + \frac{1}{3} \left(\frac{l\varphi}{d} \right)^2 \right]$ $\tau_{el}(\varphi, U) \approx \frac{1}{2} \frac{\epsilon b l^2}{d^2} U^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{l\varphi}{d} \right]$

	Wandlertyp	Wandlermodell
C	<p>Plattenwandler – longitudinal variable Fläche</p>	$0 \leq x \leq l$ $C(x) = \frac{\epsilon b (l - x)}{d}$ $F_d(U) = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon b}{d} U^2$
D	<p>Drehkondensator variable Fläche</p>	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $C(\varphi) = \frac{\epsilon R^2}{2d} \varphi$ $\tau_{el}(U) = \frac{1}{2} \frac{\epsilon R^2}{2d} U^2$
E	<p>Linearwandler variables Dielektrikum</p>	$0 \leq x \leq l$ $C(x) = \frac{\epsilon_0 b l}{d} + \frac{b}{d} x (\epsilon_1 - \epsilon_0)$ $F_d(U) = \frac{1}{2} \frac{b}{d} (\epsilon_1 - \epsilon_0) U^2$

Quelle: Janschek: Systementwurf mechatronischer Systeme



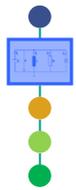
3.3 Grundlegende Systemelemente

3.3.8 Ankergeometrien

	Wandlertyp	Wandlermodell
A	<p>Hubanker – U-Ständer variabler Luftspalt</p>	$L(x) = N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{2} \frac{1}{x}$ $F_{em}(x, I) = \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{2} \frac{1}{x^2}$
B	<p>Hubanker – E-Ständer variabler Luftspalt</p>	$L(x) = N^2 \frac{2\mu_0 A_{pol}}{3} \frac{1}{x}$ $F_{em}(x, I) = \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{2\mu_0 A_{pol}}{3} \frac{1}{x^2}$
C	<p>Klappanker – U-Ständer variabler Luftspalt</p>	$\varphi \ll 1$ $L(\varphi) \approx N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{l} \frac{1}{\varphi}$ $\tau_{em}(\varphi, I) \approx \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{l} \frac{1}{\varphi^2}$

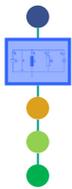
	Wandlertyp	Wandlermodell
D	<p>Topfmagnet variabler Arbeitsluftspalt</p>	<p>Zylinderquerschnitt</p> <p>mittlerer Flussquerschnitt: $D + \delta$</p> $L(x) = N^2 \frac{\mu_0 \pi D^2 (D + \delta) a}{\delta D^2 + 4(D + \delta) a \cdot x}$ $F_{em}(x, I) = \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{4\mu_0 \pi D^2 (D + \delta)^2 a^2}{(\delta D^2 + 4(D + \delta) a \cdot x)^2}$
E	<p>Tauchanker – Einfachständer variable Fläche</p>	<p>Rechteckquerschnitt</p> $L(x) = N^2 \frac{\mu_0 b}{2\delta} \cdot x$ $F_{em}(x, I) = \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{\mu_0 b}{2\delta}$ <p>Zylinderquerschnitt</p> <p>mittlerer Flussquerschnitt: $D + \delta$</p> $L(x) = N^2 \frac{\mu_0 \pi (D + \delta)}{\delta} \cdot x$ $F_{em}(I) = \frac{1}{2} I^2 N^2 \frac{\mu_0 \pi (D + \delta)}{\delta}$

Quelle: Janschek: Systementwurf mechatronischer Systeme



	Wandlertyp	Wandlermodell
F	<p>Tauchanker – U-Ständer variable Fläche</p>	<p>Rechteckquerschnitt $L_0 = N^2 \frac{\mu_0 ab}{2\delta}$</p> <p>Zylinderquerschnitt $L_0 = N^2 \frac{\mu_0 \pi (D + \delta)a}{\delta}$</p> <p>mittlerer Flussquerschnitt: $D + \delta$</p> $L(x) = L_0 \frac{x}{a + x}$ $F_{em}(x, I) = \frac{1}{2} I^2 L_0 \frac{a}{(a + x)^2}$
G	<p>Drehanker – zweipolig variable Fläche</p>	$R_{m, \min} \approx \frac{2\delta_{\min}}{\mu_0 A_{pol}} \Rightarrow L_{\max} \approx N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{2\delta_{\min}}$ $R_{m, \max} \approx \frac{2\delta_{\max}}{\mu_0 A_{pol}} \Rightarrow L_{\min} \approx N^2 \frac{\mu_0 A_{pol}}{2\delta_{\max}}$ $L_0 := \frac{1}{2} (L_{\min} + L_{\max}) = \frac{N^2}{4} \mu_0 A_{pol} \left(\frac{1}{\delta_{\max}} + \frac{1}{\delta_{\min}} \right)$ $L_V := \frac{1}{2} (L_{\max} - L_{\min}) = \frac{N^2}{4} \mu_0 A_{pol} \left(\frac{1}{\delta_{\min}} - \frac{1}{\delta_{\max}} \right)$ $L(x) \approx L_0 + L_V \cos 2\varphi$ $\tau_{em}(x, I) \approx I^2 L_V \sin 2\varphi$

Quelle: Janschek: Systementwurf mechatronischer Systeme

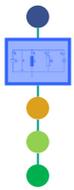


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1 Aufstellen des ESB

- 1 Wirkplan und Domärentrennung einzeichnen
- 2 Festlegen der verallgem. Stromvariablen (f_l) und Spannungsvariablen (e_j)
- 3 Festlegen der verallgem. Netzwerkelemente
- 4 Anwendung topologischer Regeln zur Ermittlung der Strukturen des verallgem. Netzwerkes
 - a) jeder Spannungsvariable (inkl. $e = 0$) wird ein Knoten zugeordnet
 - b) Die Lage der Netzwerkelemente zwischen den Knoten entspricht der Lage der originalen Bauelemente

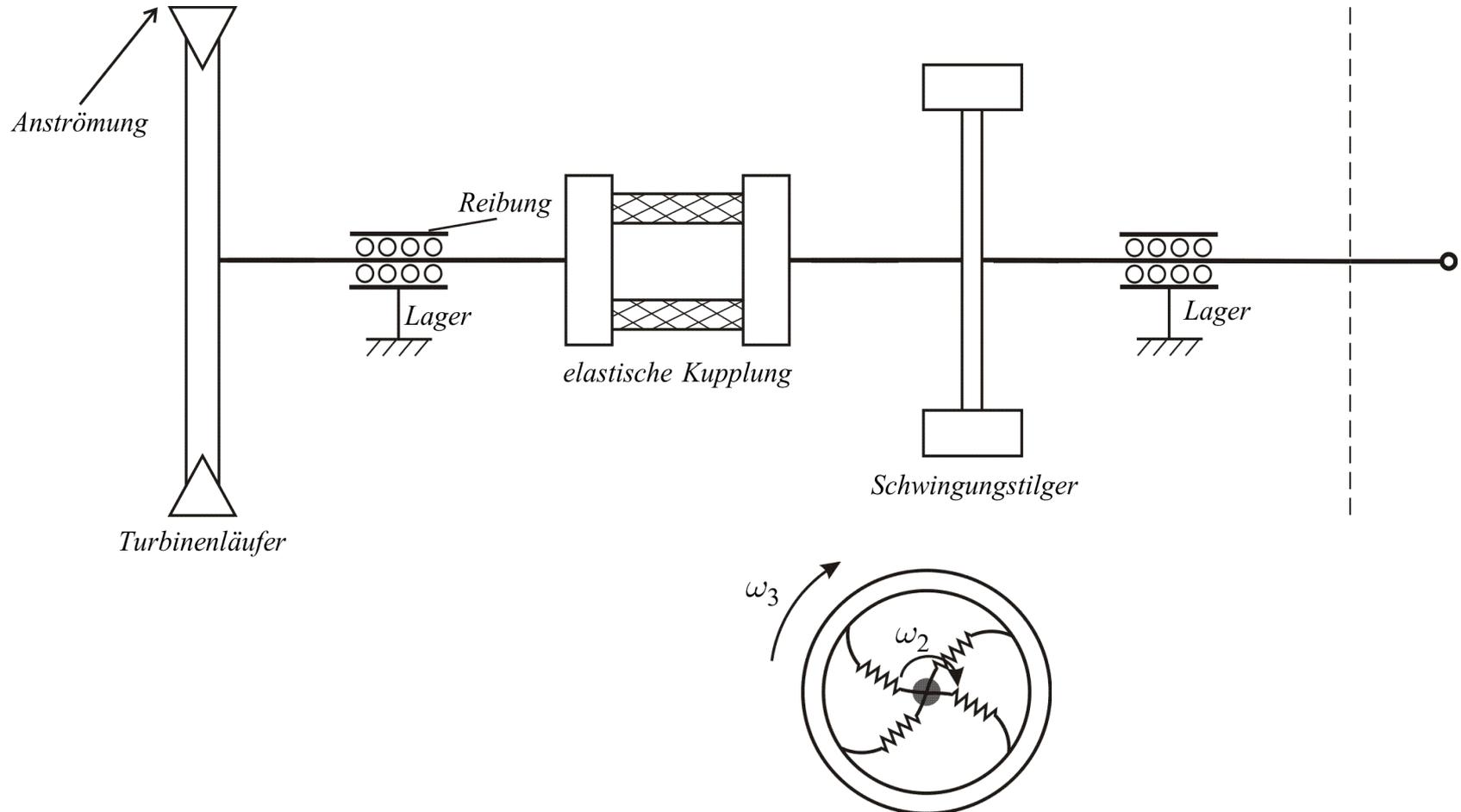
Anmerkung: Massen gehen über in Kondensatoren ggü. 0-Potential

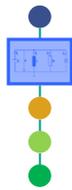


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1 Aufstellen des ESB

Beispiel:



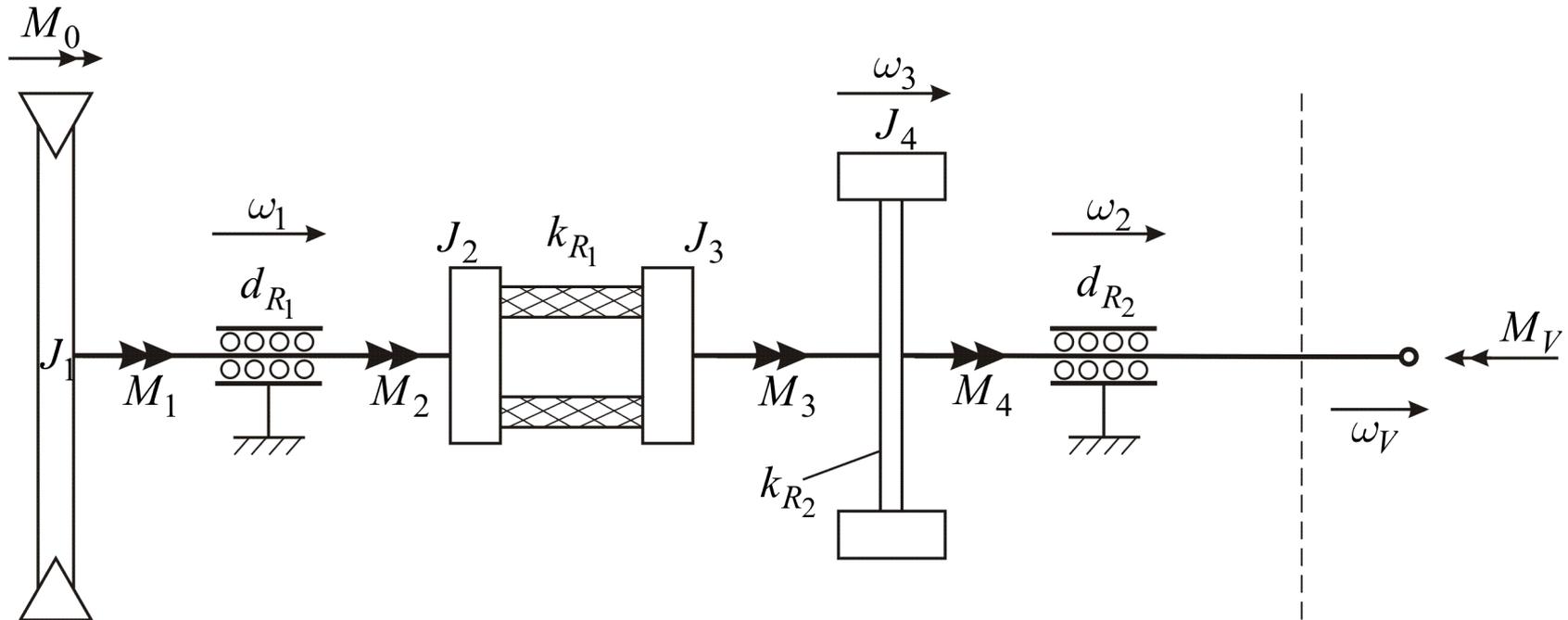


3.4

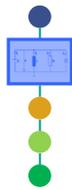
Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1

Aufstellen des ESB



- 1 Momente und ω Winkelgeschwindigkeiten definieren
Bezugssystem bei $\omega_B=0$ definieren
- 2 Netzwerkelemente festlegen

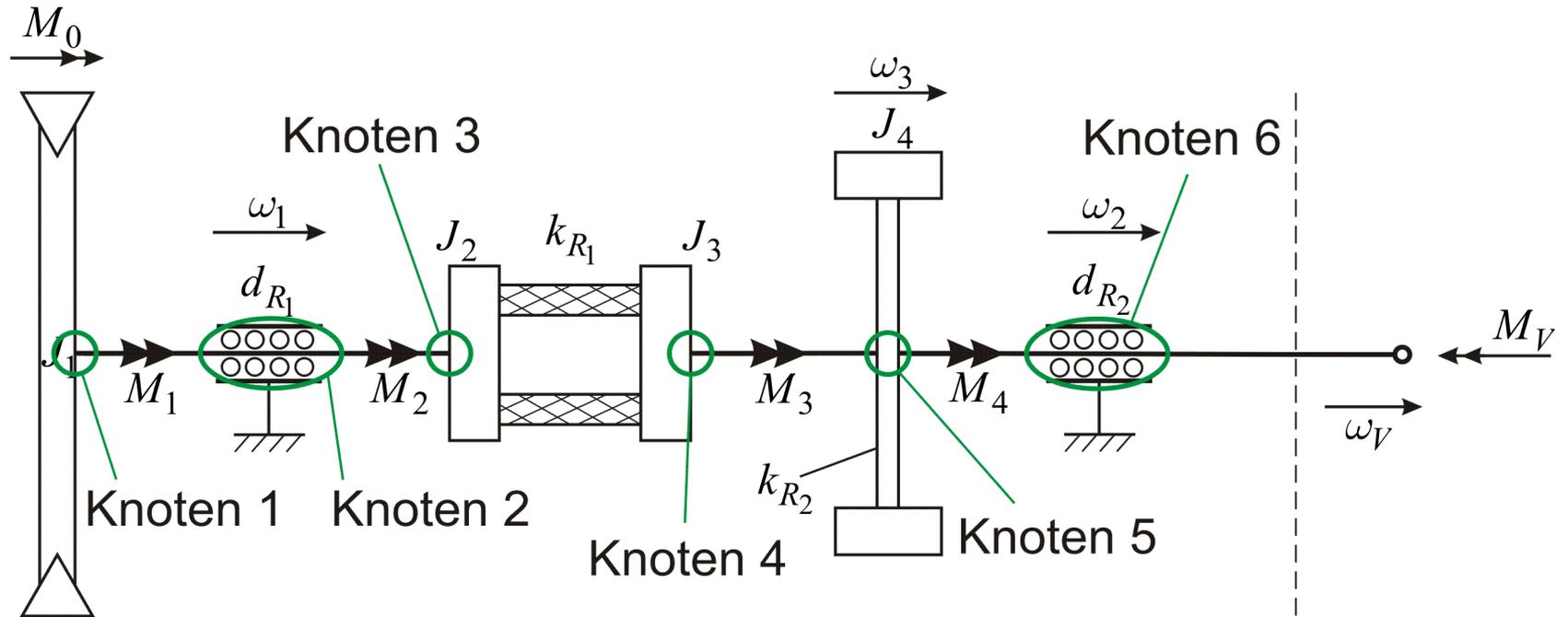


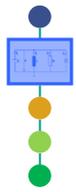
3.4

Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1

Aufstellen des ESB



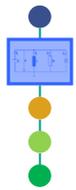


3.4

Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1

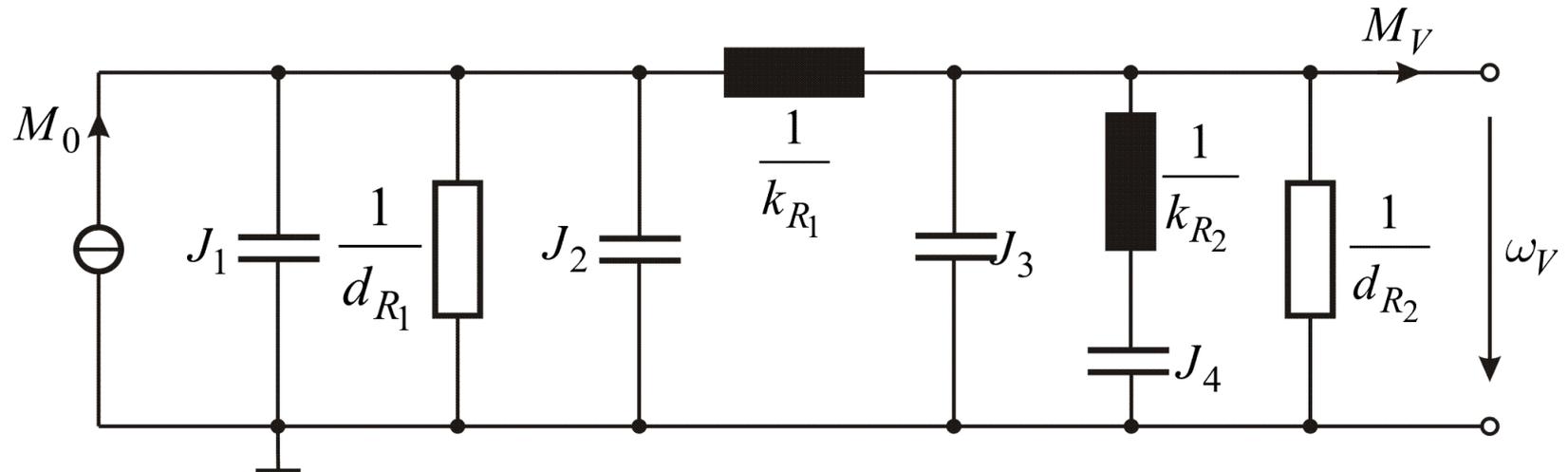
Aufstellen des ESB

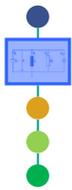


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.1 Aufstellen des ESB

4 ESB





3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.2 Mathematisches Modell aus ESB

- Netzwerkanalysemethoden aus LEN anwendbar
 - Maschenstromverfahren
 - Knotenpotentialverfahren

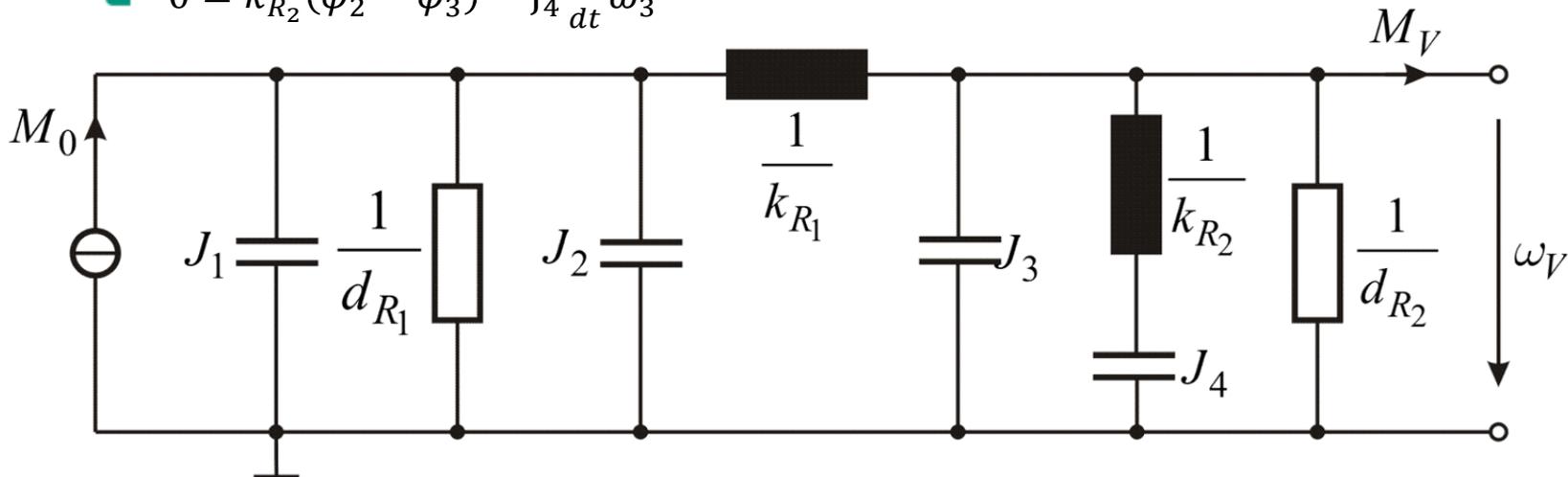
■ Beispiel nach Knotenpotentialverfahren

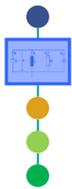
- $M_0 = (J_1 + J_2) \frac{d}{dt} \omega_1 + d_{R_1} \omega_1 + k_{R_1} (\varphi_1 - \varphi_2),$

$$\omega = \frac{d}{dt} \varphi, \omega_2 = \omega_V$$

- $-M_V = -k_{R_1} (\varphi_1 - \varphi_2) + J_3 \frac{d}{dt} \omega_2 + k_{R_2} (\varphi_2 - \varphi_3) + d_{R_2} \omega_2$

- $0 = k_{R_2} (\varphi_2 - \varphi_3) - J_4 \frac{d}{dt} \omega_3$

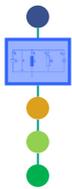




3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.3 Aufstellen des Bondgraphen

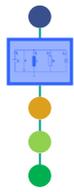
- 1 Wirkplan und Domänentrennung einzeichnen
- 2 Festlegen der verallgem. Stromvariablen (f_l) und Spannungsvariablen (e_j)
- 3 Festlegen der verallgem. Netzwerkelemente
- 4 Anwendung topologischer Regeln zur Ermittlung der Strukturen des verallgem. Netzwerkes
 - a) Eintragen jeder Spannungsvariablen (ohne Bezugspotential)
 - b) Eintragen der Stromvariablen
 - c) Erkennen aller Spannungsdifferenzen, die über Ports mit den erkannten Elementen verbunden werden. **Visualisiere die Spannungsdifferenzen mit Hilfe von 1-Junctions**
 - d) **Verbinde die Ports aller Elemente mit den 0-Junctions der korrespondierenden Spannungen. Nicht mechanische Elemente 0-Junctions. Mechanische Elemente 1-Junctions**



3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.3 Aufstellen des Bondgraphen

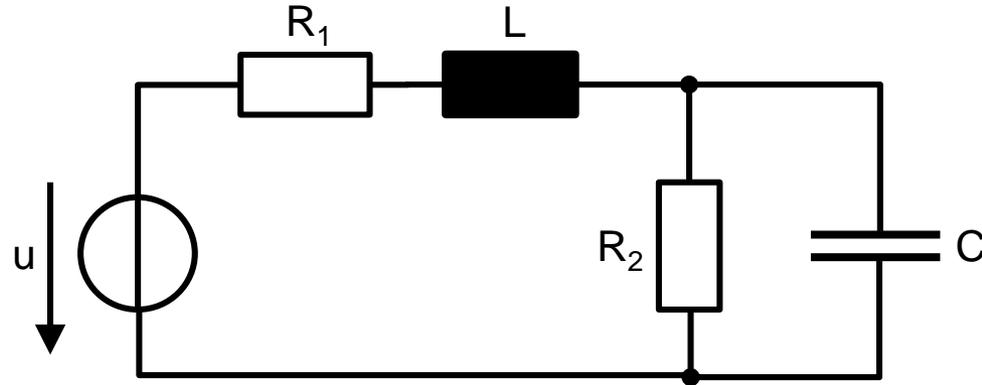
- 1 Wirkplan und Domänentrennung einzeichnen
- 2 Festlegen der verallgem. Stromvariablen (f_l) und Spannungsvariablen (e_j)
- 3 Festlegen der verallgem. Netzwerkelemente
- 4 Anwendung topologischer Regeln zur Ermittlung der Strukturen des verallgem. Netzwerkes
 - a) Elektrische Systeme
 - Darstellung jedes Potentials durch eine 0-Junction
 - Anschluss jedes Bauteils an eine 1-Junction, welche sich zwischen zwei 0-Junctions befindet,
 - b) Mechanische Systeme
 - Anschluss jeder Masse an eine 1-Junction, Berücksichtigung von Reibung über einen Widerstand an der 1-Junction
 - Anschluss von Elementen, welche eine Geschwindigkeitsdifferenz bewirken (z. B. Federn) an eine 0-Junction

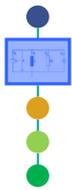


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.3 Aufstellen des Bondgraphen

■ Beispiel



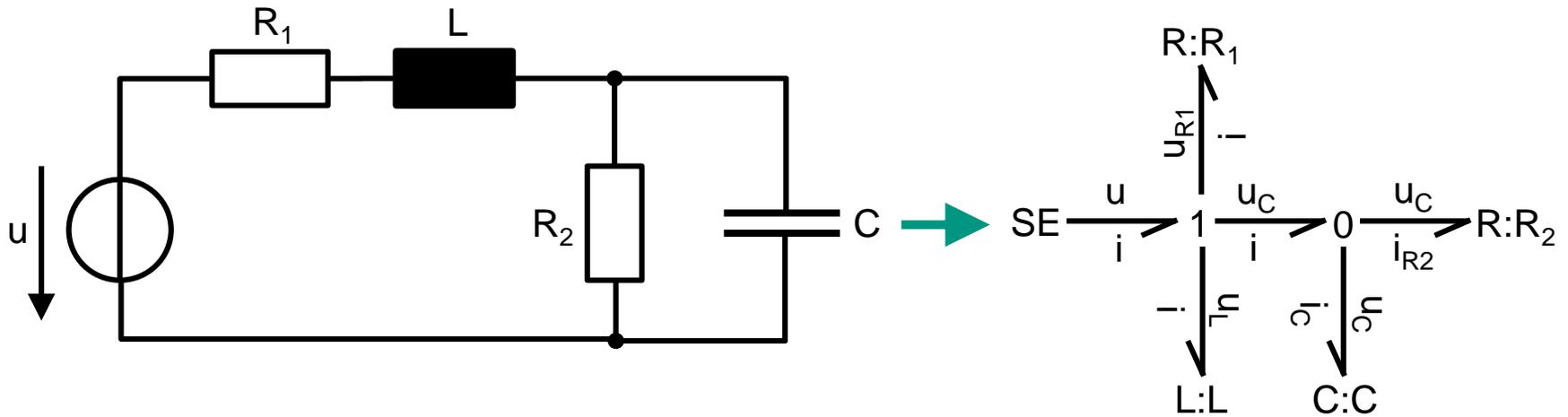


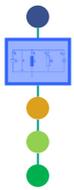
3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.3 Aufstellen des Bondgraphen

■ Beispiel

1 - 4 :

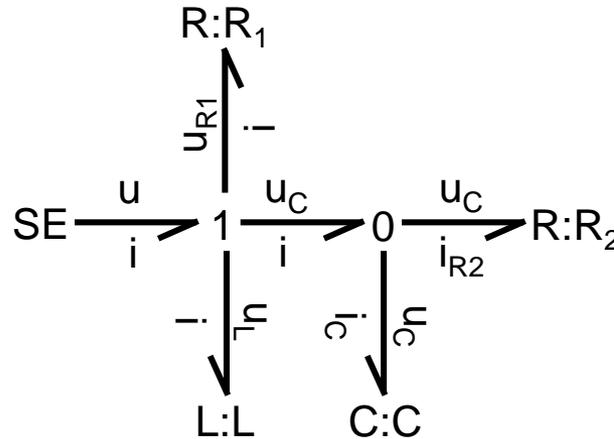




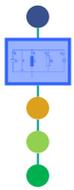
3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Mathematisches Modell aus Bondgraphen

- **Ausgangspunkt:** Struktur des Bondgraphen bekannt



- **Ziel/ offene Frage:** Berechnungsstruktur des Bondgraphen festlegen
(Bestimmung der Ein-/ Ausgangsgrößen der einzelnen Bonds)
- **Lösung:** Einführung eines Kausalitätsbalken (vertikaler Strich) zur Festlegung auf welcher Seite die Flussgröße berechnet wird



3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

- Dissipative Elemente (freie Kausalität)

$$\frac{e}{f} \rightarrow |R:R$$

$$f = e / R$$

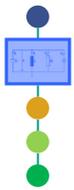
„effort output“ - Kausalität

$$| \frac{e}{f} \rightarrow |R:R$$

$$e = R \cdot f$$

„flow output“ - Kausalität

➔ Wahl der Kausalität abhängig von der Topologie

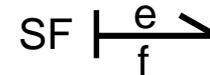
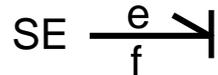


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

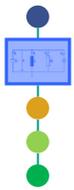
■ Potentialquelle

■ Flussquelle



■ Quelle gibt Potentialgröße vor und die Flussgröße ergibt sich am Ausgang.

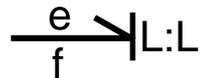
■ Quelle gibt Flussgröße vor und die Potentialgröße ergibt sich am Ausgang.



3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

■ Induktive Elemente



$$f = \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t_1} e(t') dt'$$

„effort output“ - Kausalität

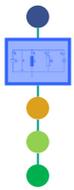
■ Kapazitive Elemente



$$e = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} f(t') dt'$$

„flow output“ - Kausalität

→ „Integrale Kausalität“ bevorzugt



3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

■ Transformatoren

- $e_2 = \ddot{u} \cdot e_1$

- $f_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot f_1$

→ Kausalität bleibt erhalten



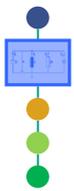
■ Gyratoren

- $e_2 = \ddot{u} \cdot f_1$

- $f_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot e_1$

→ Umkehrung der Kausalität



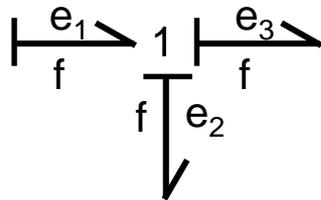


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

■ 1-Junction

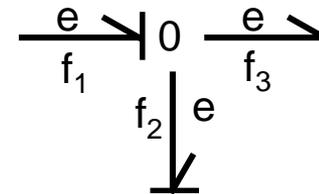
- $f = f_1 = f_2 = f_3$
- $e_1 + e_2 + e_3 = 0$
- ➔ Flussberechnung nur aus einer Gleichung
- ➔ Nur ein Balken weg von 1-Junction



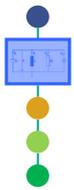
$$e_1 = e_2 + e_3$$

■ 0-Junction

- $e = e_1 = e_2 = e_3$
- $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
- ➔ Potentialberechnung nur aus einer Gleichung
- ➔ Nur ein Balken je 0-Junction



$$f_1 = f_2 + f_3$$



3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

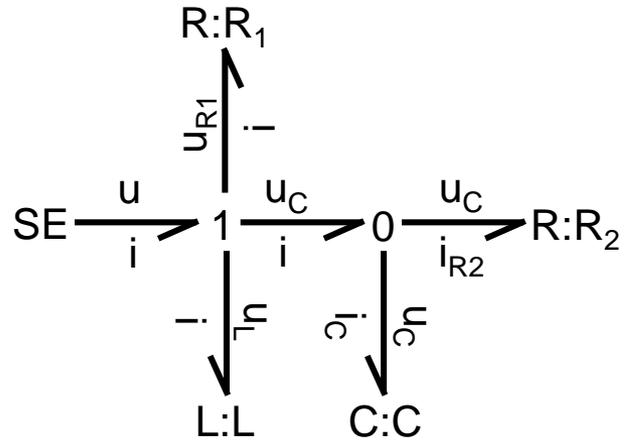
- 1 Kausalität der Quellen zuweisen
- 2 Kausalität der Energiespeicher bestimmen und falls möglich bevorzugte Kausalität verwenden
- 3 Kausalitäten der Junctions/Verzweigungen zuweisen
- 4 Kausalität der dissipativen Elementen bestimmen

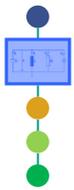


3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Kausalisierung des Bondgraphen

■ Beispiel





3.4 Generalisierte Netzwerkanalyse

3.4.4 Mathematisches Modell aus Bondgraphen

Algebraische Gleichungen

- $u_L = u - u_{R_1} - u_C$
- $i_C = i - i_{R_2}$
- $u_{R_1} = R_1 \cdot i$
- $i_{R_2} = u_C / R_2$

Integrale

- $i = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt$
- $u_C = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$

